Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О нормальных подгруппах и индексах не содержащих их максимальных подгрупп

М.А.Грибовская

Рассматриваются только конечные группы. В 1954 году Б. Хупперт установил сверхразрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп — простые числа [1]. Ф. Холл ([2], теорема VI.9.4) доказал, что если в группе G индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел, то группа G разрешима. Эту теорему развил С.Ф.Каморников [3], установив дисперсивность сверхразрешимого корадикала и вхождение его $2'$-холловой подгруппы в подгруппу Фиттинга всей группы.

Следует заметить, что в простой группе $PSL(2,7)$ индексы максимальных подгрупп исчерпываются числами 7 и 8. Поэтому в теореме Ф.Холла дальнейшее ослабление на показатели простых делителей индексов максимальных подгрупп недопустимо, т.е. группа, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, квадратами простых чисел или кубами простых чисел, может быть неразрешимой.

В работах Л.А.Шеметкова и Л.Я.Полякова теорема Хупперта о сверхразрешимости группы и теорема Ф.Холла о разрешимости группы распространена на нормальные подгруппы группы с ограниченными индексами максимальных подгрупп.

Из теоремы Л.А.Шеметкова ([4],теорема 3.1) следует, что если K — нормальная подгруппа группы G и индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, то подгруппа K сверхразрешима.

Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, или квадратом простого числа, то по теореме Л.Я.Полякова ([5], теорема 1) подгруппа K разрешима.

Более детальное изучение строения нормальной подгруппы K с ограниченными индексами не содержащих K максимальных подгрупп группы G осуществлено в работах В.С.Монахова, М.В.Селькина и Е.Е.Грибовской ([6], [7], [8], [9]).

Автором ([10]) была рассмотрена более общая ситуация, а именно, когда индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, либо делится на наибольший простой делитель порядка K, либо является простым числом, или квадратом простого числа. Установлено нормальное строение подгруппы K, откуда выводится, в частности, что подгруппа K разрешима и её нильпотентная длина не выше 5, p-длина не выше 1 для всех $p > 3$, а 2-длина и 3-длина не превосходят 2.

Эта тематика развивается в настоящей заметке в следующей теореме.

Теорема. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G и p — наибольший простой делитель порядка K. Если в группе G индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, либо делится на p, либо является простым числом, квадратом простого числа или кубом простого числа и $(|K|, q^2+q+1) = 1$ для любого $q \in \pi(K)$, то подгруппа K разрешима и её $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре.*

Доказательство проведём индукцией по порядку подгруппы K. Пусть P — силовская p-подгруппа группы K. Предположим, что $P \triangleleft G$. Факторгруппа G/P имеет нормальную подгруппу K/P. Пусть H/P — максимальная подгруппа группы G/P, не содержащая K/P. Тогда H — максимальная подгруппа группы G. Ясно, что H не содержит K. Так как $P \leqslant H$, то индекс $|G:H|$ не делится на p и, следовательно, является простым числом, квадратом простого числа или кубом простого числа и $(|K/P|, q^2+q+ +1) = 1$ для любого $q \in \pi(K/P)$. Значит, факторгруппа G/P с нормальной подгруппой K/P удовлетворяет условию теоремы, по индукции K/P разрешима и её $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре. Из разрешимости K/P и P следует разрешимость подгруппы K. А так как p — наибольший простой делитель $|K|$, то K обладает нормальной, дисперсивной по Оре $\{2,3\}'$-холловой подгруппой.

Пусть теперь P не является нормальной подгруппой группы G, т.е. $N_G(P) \neq G$. Тогда $N_G(P)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Поскольку $P \subseteq N_G(P) \cap K \subseteq M \cap K \subseteq K$, то $N_G(P) \cap K$ является нормализатором подгруппы P в K и в $M \cap K$. По теореме Силова, получаем $|K : N_G(P) \cap K| \equiv 1 (mod\ p)$ и $|M \cap \cap K : N_G(P) \cap K| \equiv 1 (mod\ p)$. А так как

$$|K : N_G(P) \cap K| = |K : M \cap K||M \cap K : N_G(P) \cap K|,$$

то $|K : M \cap K| \equiv 1 (mod\ p)$. По лемме Фраттини имеем $N_G(P)K = G$, откуда следует, что $K \nsubseteq M$. Поэтому $G = MK$ и $|K : M \cap K| = |G : M|$, а по условию этот индекс есть r, r^2, или r^3, где r — простое число. Ясно, что $r \in \pi(K)$. По выбору p число $r < p$. Если $|G : M| = r$, то $r \equiv 1 (mod\ p)$, что невозможно. Если $|G : M| = r^2$, то $r^2 \equiv 1 (mod\ p)$ или $(r+1)(r-1) = kp$, где $k > 0$ — целое число. Последнее равенство возможно лишь в случае, когда $r + 1 = p$, т.е. $p = 3$, $r = 2$. Значит K — $\{2,3\}$-группа и она разрешима по теореме Бернсайда. Остается рассмотреть случай, когда $|G : M| = r^3$. В этом случае $r^3 \equiv 1 (mod\ p)$ или $(r-1)(r^2+r+1) = kp$, где $k > 0$ — целое число. Последнее равенство возможно лишь в случае, когда p делит r^2+r+1, а это противоречит условию. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G и p — наибольший простой делитель порядка K. Если в группе G индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, либо делится на p, либо является простым числом, квадратом простого числа, либо кубом двойки и порядок группы не делится на 7, то подгруппа K разрешима и ее $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре*

Аналогичные следствия можно записать для куба 3, куба 5 и т.д.

Следствие 2. *Пусть G — конечная группа и $(|G|, q^2+q+1) = 1$ для любого $q \in \in \pi(G)$. Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G индекс каждой максимальной подгруппы либо делится на p, либо является простым числом, квадратом простого числа или кубом простого числа, то группа G разрешима и ее $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре.*

Следствие 3. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G индекс каждой максимальной подгруппы либо делится на p, либо является простым числом, квадратом простого числа, либо кубом двойки и порядок группы не делится на 7, то G разрешима и ее $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре.*

Аналогичные следствия можно записать для куба 3, куба 5 и т.д.

Abstract. Let K be a normal subgroup of a finite group G. Let $G = MK$, where M is maximal in G. The author studies the case when $|G : M| = q^\alpha$ and $\alpha \leq 3$.

Литература

1. B. Huppert, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z. **60** (1954), 409–434.

2. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.

3. С.Ф. Каморников, *К теореме Ф.Холла,* Вопросы алгебры, № 5 (1990), 45–52.

4. Л.А. Шеметков, *О конечных разрешимых группах*, Известия АН СССР, сер. матем. **32**, №3 (1968), 533–559.

5. Л.Я. Поляков, *О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы*, В сб.: *Конечные группы*, Минск, Наука и техника, 1966, с. 89–97.

6. В.С. Монахов, М.В.Селькин, *О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп*, Матем. заметки, **51**, № 3 (1992), 85–90.

7. В.С.Монахов, М.В.Селькин, *О строении нормальных подгрупп конечных групп*, Вопросы алгебры, № 6 (1993), 96–100.

8. В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская, *О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп*, Матем. заметки, **70**, № 4 (2001), 603–612.

9. В.С. Монахов, М.В.Селькин, Е.Е.Грибовская, *О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп*, Укр. мат. журн. **54**, №7 (2002), 940–950.

10. М.А. Грибовская, *Нормальные подгруппы конечной группы и индексы не содержащих их максимальных подгрупп*, Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта, № 4(26) (2002), 82–86.

Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации

Поступило 10.10.04