

УДК 517.977

Демпфирование больших колебаний связанных маятников

Е. А. Ружицкая

1. Введение. Демпфирование динамических систем является одной из центральных проблем теории управления движением [1, 2]. Наиболее перспективные подходы к проблеме демпфирования должны базироваться на теории оптимального управления [3] и дифференциальные игры [4], в рамках которых можно естественным образом учитывать ограничения на управления, не задавать структуру обратных связей, получать большие области притяжения, обеспечивать высокое качество переходных процессов.

В данной работе развивается метод построения ограниченных оптимальных обратных связей, основанный на теории оптимального управления, предложенный в работах [5, 6].

2. Постановка задачи. Математическая модель системы двух связанных маятников (рис. 1) с приложенным к оси подвеса управляющим моментом u имеет вид

$$\begin{aligned}m_1 l^2 \ddot{x}_1 &= -m_1 g l \sin(x_1) - kl^2 m_1 \sin(x_1 + x_2) + u, \\m_2 l^2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g l \sin(x_2) - kl^2 m_2 \sin(x_1 + x_2),\end{aligned}\quad (1)$$

где x_1, x_2 — углы отклонения маятников от нижнего положения равновесия, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2 — угловые ускорения, m_1, m_2 — массы маятников, l — длина маятников, g — ускорение свободного падения, k — коэффициент упругости пружины, $t \geq 0$ — время.

Состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0, t \geq 0$, на фазовых плоскостях $(x_1, \dot{x}_1), (x_2, \dot{x}_2)$ являются точки

$$(x_1 = \pm 2p\pi, \dot{x}_1 = 0), (x_2 = \pm 2p\pi, \dot{x}_2 = 0), p = 0, 1, \dots; \quad (2)$$

$$(x_1 = \pm(2p + 1)\pi, \dot{x}_1 = 0), (x_2 = \pm(2p + 1)\pi, \dot{x}_2 = 0), p = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

из которых (2) — устойчивые, (3) — неустойчивые состояния равновесия маятника.

При малых начальных отклонениях ($|x_1(0)| + |\dot{x}_1(0)| + |x_2(0)| + |\dot{x}_2(0)|$) для гашения колебаний маятника около устойчивого нижнего состояния равновесия $(0, 0, 0, 0)$ используется линейное уравнение

$$m_1 l^2 \ddot{x}_1 = -m_1 g l x_1 - kl^2 m_1 (x_1 + x_2) + u, \quad m_2 l^2 \ddot{x}_2 = -m_2 g l x_2 - kl^2 m_2 (x_1 + x_2). \quad (4)$$

Функцию

$$u = u(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2), \quad (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) \in R^4, \quad (5)$$

назовем обратной связью. Замена в (1) управления u на функцию (5) называется замыканием системы (1). Таким образом, уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}m_1 l^2 \ddot{x}_1 &= -m_1 g l \sin(x_1) - kl^2 m_1 \sin(x_1 + x_2) + u(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2), \\m_2 l^2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g l \sin(x_2) - kl^2 m_2 \sin(x_1 + x_2),\end{aligned}\quad (6)$$

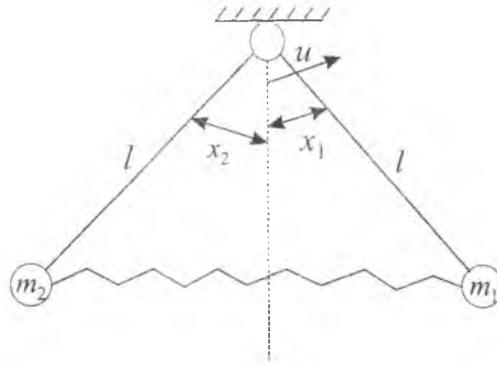
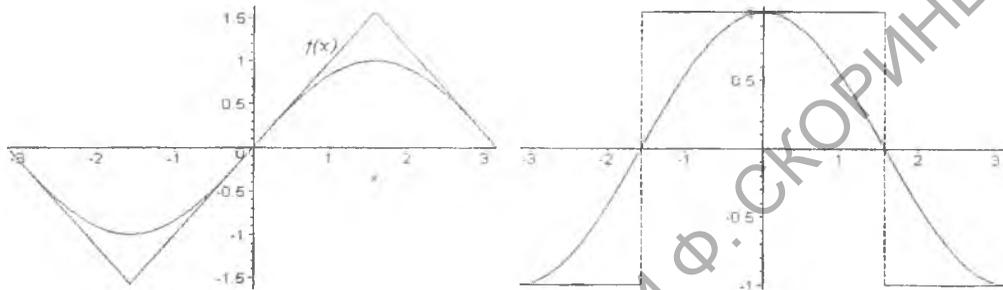


Рис. 1: Система связанных маятников

Рис. 2: Аппроксимация функций $\sin x$, $\cos x$

Обратную связь (5) назовем ограниченной демпфирующей в области G для состояния равновесия $(x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0)$, если: 1) $u(0, 0, 0, 0) = 0$; 2) $|u(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)| \leq L$, $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) \in G$; 3) решения $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, замкнутой системы (6) асимптотически устойчивы в G .

Если начальные состояния заметно удалены от состояния равновесия $(0, 0, 0, 0)$, то линейная модель (4) исключает из рассмотрения подобные движения исходной нелинейной системы (1). Поэтому заменим систему (1) эквивалентной нелинейной системой

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{x}_1 &= -m_1 g l \sin(x_1) - kl^2 m_1 (\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2) + u, \\ m_2 l^2 \ddot{x}_2 &= -m_2 g l \sin(x_2) - kl^2 m_2 (\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Нелинейную характеристику $\sin x$ системы (7) заменим на периодическую кусочно-линейную функцию $f(x)$, а нелинейную характеристику $\cos x$ — кусочно-постоянной функцией (на множество $|x| > 3\pi/2$ функции продолжаются периодически) (рис. 2):

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi/2; \\ -\pi - x, & -3\pi/2 \leq x \leq -\pi/2; \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, \end{cases} \quad \cos x = \begin{cases} -1, & |x| \leq \pi/2; \\ 1, & -3\pi/2 \leq x \leq -\pi/2; \\ -1, & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

3. Сопровождающая задача оптимального управления. Определим класс дискретных управлений с периодом квантования $h > 0$:

$$u(t) = u(mh), \quad t \in [mh, (m+1)h], \quad m = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Соответствующую дискретному управлению обратную связь будем обозначать символом $u_h(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$. Пусть заданы: начальное состояние $z = (z_1 = x_1(0) = 3, z_2 = \dot{x}_2(0) = 0, z_3 = x_3(0) = -3, z_4 = \dot{x}_2(0) = 0)$; значения $l = 1, m_1 = 1, m_2 = 1, k = 44.8, \Theta = 2, h = 0.1$. Рассмотрим случай, когда оптимальная траектория системы (6) будет проходить по трем областям I: $\pi/2 \leq x_1 \leq 3\pi/2$; II: $-\pi/2 < x_1 < \pi/2, -\pi/2 < x_2 < \pi/2$, III: $-3\pi/2 \leq x_2 \leq -\pi/2$ следующим образом: траектория первого маятника из области I в II, траектория второго маятника — из области III в I. Для построения ограниченной демпфирующей обратной связи выберем параметр $\Theta = Nh$ (N — натуральное число), введем вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления кусочно-линейной системой в классе дискретных доступных управлений (8):

$$\rho_{\Theta}(z) = \rho(z, \Theta, \Theta_1^0) = \min_{u, \Theta_1} |u(t)|,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -35x_1 - 44.8x_2 - 9.8\pi + u, \quad \ddot{x}_2 = -44.8x_1 - 35x_2 + 9.8\pi, \\ x_1(0) &= z_1, \quad \dot{x}_1(0) = z_2, \quad x_2(0) = z_3, \quad \dot{x}_2(0) = z_4, \quad t \in [0, \Theta_1], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{x}_1 = -54.6x_1 - 44.8x_2 + u, \quad \ddot{x}_2 = -44.8x_1 - 54.6x_2, \quad x_1(\Theta_1) = \pi/2, \quad x_2(\Theta_1) = -\pi/2,$$

$$x_1(\Theta) = 0, \quad \dot{x}_1(\Theta) = 0, \quad x_2(\Theta) = 0, \quad \dot{x}_2(\Theta) = 0; \quad |u(t)| \leq \rho, \quad t \in T,$$

где $\Theta_1^0 = \Theta_1^0(x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0), \dots)$ — оптимальный момент перехода траекторий $x_1^0(t), x_2^0(t), t \in T$, из областей I в II и из III в I.

Обозначим: $u_h^0(t|z), t \in T$, — оптимальное программное дискретное управление задачи (9), G_{Θ} — множество начальных состояний z , для которых существует оптимальное программное управление. Функцию

$$u_h^0(z_1, z_2, z_3, z_4) = u_h^0(0|z), \quad z \in G_{\Theta}, \quad (10)$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа обратной связи. Следуя [5], можно показать, что обратная связь

$$u_h(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = u_h^0(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2), \quad (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) \in G_{\Theta}, \quad (11)$$

является дискретной демпфирующей ограниченной обратной связью. При таком определении обратной связи автоматически учитываются ограничения на демпфирующие воздействия, не задается ее структура — она вытекает из типа сопровождающей задачи оптимального управления.

Таким образом, проблема построения ограниченной демпфирующей обратной связи, которая гасит большие колебания, сведена к реализации оптимальной обратной связи (11). Поскольку получение замкнутой (явной) формулы для оптимальной обратной связи представляет весьма сложную проблему, то, следуя [5], опишем алгоритм работы оптимального демпфера, который в каждом процессе демпфирования способен вычислять текущие сигналы обратной связи. Используя формулу Коши, исключим из задачи (9) переменные состояния:

$$\begin{pmatrix} x_1(\Theta_1) \\ \dot{x}_1(\Theta_1) \\ x_2(\Theta_1) \\ \dot{x}_2(\Theta_1) \end{pmatrix} = F^1(\Theta_1)z + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F^1(\Theta_1 - t) b dt + \int_0^{\Theta_1} F^1(\Theta_1 - t) c dt.$$

$$\begin{pmatrix} x_1(\Theta) \\ \dot{x}_1(\Theta) \\ x_2(\Theta) \\ \dot{x}_2(\Theta) \end{pmatrix} = F^2(\Theta - \Theta_1) \begin{pmatrix} x^1(\Theta_1) \\ \dot{x}^1(\Theta_1) \\ x^2(\Theta_1) \\ \dot{x}^2(\Theta_1) \end{pmatrix} + \sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F^2(\Theta - t) b dt.$$

Здесь $\Theta_1 = N_1 h$ ($N_1 < N$), N_1 — целое число, $F^1(t)$, $F^2(t)$, $t \geq 0$, — фундаментальные матрицы решений однородных систем $\dot{x}_1 = -35x_1 - 44.8x_2$, $\dot{x}_2 = -44.8x_1 - 35x_2$, и $\ddot{x}_1 = -54.6x_1 - 44.8x_2$, $\ddot{x}_2 = -44.8x_1 - 54.6x_2$, соответственно:

$$F^1(t) = \begin{pmatrix} F_{11}^1(t) & F_{12}^1(t) & F_{13}^1(t) & F_{14}^1(t) \\ F_{21}^1(t) & F_{22}^1(t) & F_{23}^1(t) & F_{24}^1(t) \\ F_{31}^1(t) & F_{32}^1(t) & F_{33}^1(t) & F_{34}^1(t) \\ F_{41}^1(t) & F_{42}^1(t) & F_{43}^1(t) & F_{44}^1(t) \end{pmatrix}, F^2(t) = \begin{pmatrix} F_{11}^2(t) & F_{12}^2(t) & F_{13}^2(t) & F_{14}^2(t) \\ F_{21}^2(t) & F_{22}^2(t) & F_{23}^2(t) & F_{24}^2(t) \\ F_{31}^2(t) & F_{32}^2(t) & F_{33}^2(t) & F_{34}^2(t) \\ F_{41}^2(t) & F_{42}^2(t) & F_{43}^2(t) & F_{44}^2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} b' &= (0, 1, 0, 0), \quad c' = (0, -9.8\pi, 0, 9.8\pi), \quad F_{11}^1(t) = F_{22}^1(t) = F_{33}^1(t) = F_{44}^1(t) = \frac{1}{4}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \\ &\frac{1}{4}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \quad F_{12}^1(t) = F_{24}^1(t) = \frac{5\sqrt{2}}{28}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} - \frac{5\sqrt{2}}{28}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{5}{\sqrt{8862}}\sin\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \\ F_{13}^1(t) &= F_{24}^1(t) = F_{31}^1(t) = F_{42}^1(t) = -\frac{1}{4}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} - \frac{1}{4}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \quad F_{14}^1(t) = \\ F_{32}^1(t) &= -\frac{5\sqrt{2}}{28}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{5\sqrt{2}}{28}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{5}{\sqrt{8862}}\sin\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \quad F_{21}^1(t) = F_{43}^1(t) = \frac{7\sqrt{2}}{40}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} - \\ &\frac{7\sqrt{2}}{40}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} - \frac{\sqrt{8862}}{20}\sin\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \quad F_{23}^1(t) = F_{41}^1(t) = -\frac{7\sqrt{2}}{40}e^{\frac{7\sqrt{2}}{10}t} + \frac{7\sqrt{2}}{40}e^{-\frac{7\sqrt{2}}{10}t} - \frac{\sqrt{8862}}{20}\sin\left(\frac{\sqrt{8862}}{10}t\right), \\ F_{11}^2(t) &= F_{22}^2(t) = F_{33}^2(t) = F_{44}^2(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right), \quad F_{12}^2(t) = \\ F_{24}^2(t) &= \frac{\sqrt{5}}{994}\left(\sqrt{497}\sin\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) + 71\sin\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right)\right), \quad F_{13}^2(t) = F_{24}^2(t) = F_{31}^2(t) = F_{42}^2(t) = \\ &\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right), \quad F_{14}^2(t) = F_{32}^2(t) = -\frac{\sqrt{5}}{994}\left(\sqrt{497}\sin\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) - 71\sin\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right)\right), \\ F_{21}^2(t) &= F_{43}^2(t) = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\sqrt{497}\sin\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) + 71\sin\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right)\right), \quad F_{23}^2(t) = F_{41}^2(t) = \\ &\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\sqrt{497}\sin\left(\sqrt{\frac{497}{5}}t\right) - 71\sin\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}t\right)\right). \end{aligned}$$

Запишем задачу (9) с учетом используемого класса доступных управлений в эквивалентной функциональной форме:

$$\rho = \rho(z, \Theta, \Theta_1^0) = \min_{u, \Theta_1} |u_j|,$$

$$F_{11}^1(\Theta_1)z_1 + F_{12}^1(\Theta_1)z_2 + F_{13}^1(\Theta_1)z_3 + F_{14}^1(\Theta_1)z_4 +$$

$$\int_0^{\Theta_1} F_{12}^1(\Theta_1)c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{14}^1(\Theta_1)c_4 dt + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}^1(\Theta_1 - t) dt = \pi/2, \quad (12)$$

$$F_{31}^1(\Theta_1)z_1 + F_{32}^1(\Theta_1)z_2 + F_{33}^1(\Theta_1)z_3 + F_{34}^1(\Theta_1)z_4 +$$

$$\int_0^{\Theta_1} F_{32}^1(\Theta_1)c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{34}^1(\Theta_1)c_4 dt + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{32}^1(\Theta_1 - t) dt = -\pi/2,$$

$$(F_{12}^2(\Theta - \Theta_1)F_{21}^1(\Theta) + F_{14}^2(\Theta - \Theta_1)F_{41}^1(\Theta_1))z_1 + (F_{12}^2(\Theta - \Theta_1)F_{22}^1(\Theta) + F_{14}^2(\Theta - \Theta_1)F_{42}^1(\Theta_1))z_2 +$$

$$(F_{12}^2(\Theta - \Theta_1)F_{23}^1(\Theta) + F_{14}^2(\Theta - \Theta_1)F_{43}^1(\Theta_1))z_3 + (F_{12}^2(\Theta - \Theta_1)F_{24}^1(\Theta) + F_{14}^2(\Theta - \Theta_1)F_{44}^1(\Theta_1))z_4 +$$

$$F_{12}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{22}^1(\Theta_1 - t)c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{24}^1(\Theta_1 - t)c_4 dt \right) + \pi/2 F_{11}^2(\Theta - \Theta_1) +$$

$$\begin{aligned}
& F_{14}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{42}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{44}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) - \pi/2 F_{13}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{12}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{14}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{42}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \\
& \sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{12}^2(\Theta - t) dt = 0, \\
& (F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) F_{21}^1(\Theta) + F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) F_{41}^1(\Theta_1)) z_1 + (F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) F_{22}^1(\Theta) + F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) F_{42}^1(\Theta_1)) z_2 + \\
& (F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) F_{23}^1(\Theta) + F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) F_{43}^1(\Theta_1)) z_3 + (F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) F_{24}^1(\Theta) + F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) F_{44}^1(\Theta_1)) z_4 + \\
& F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{22}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{24}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) + \pi/2 F_{21}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{42}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{44}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) - \pi/2 F_{23}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{22}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{24}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{42}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \\
& \sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}^2(\Theta - t) dt = 0, \\
& (F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) F_{21}^1(\Theta) + F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) F_{41}^1(\Theta_1)) z_1 + (F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) F_{22}^1(\Theta) + F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) F_{42}^1(\Theta_1)) z_2 + \\
& (F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) F_{23}^1(\Theta) + F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) F_{43}^1(\Theta_1)) z_3 + (F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) F_{24}^1(\Theta) + F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) F_{44}^1(\Theta_1)) z_4 + \\
& F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{22}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{24}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) + \pi/2 F_{31}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{42}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{44}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) - \pi/2 F_{33}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{32}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{34}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{42}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \\
& \sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{32}^2(\Theta - t) dt = 0, \\
& (F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) F_{21}^1(\Theta) + F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) F_{41}^1(\Theta_1)) z_1 + (F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) F_{22}^1(\Theta) + F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) F_{42}^1(\Theta_1)) z_2 + \\
& (F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) F_{23}^1(\Theta) + F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) F_{43}^1(\Theta_1)) z_3 + (F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) F_{24}^1(\Theta) + F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) F_{44}^1(\Theta_1)) z_4 + \\
& F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{22}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{24}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) + \pi/2 F_{41}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) \left(\int_0^{\Theta_1} F_{42}^1(\Theta_1 - t) c_2 dt + \int_0^{\Theta_1} F_{44}^1(\Theta_1 - t) c_4 dt \right) - \pi/2 F_{43}^2(\Theta - \Theta_1) + \\
& \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{42}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{22}^1(\Theta_1 - t) dt \right) + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \left(F_{44}^2(\Theta - \Theta_1) \int_{(j-1)h}^{jh} F_{42}^1(\Theta_1 - t) dt \right) +
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)h}^{jh} F_{42}^2(\Theta - t) dt = 0, \quad |u_j| \leq L, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Задача (12) — задача оптимального программного управления. Алгоритм решения задачи аналогичен описанному в работе [5, 6]. Если $|x_1^*(\tau)| < \pi/2$ и $|x_2^*(\tau)| < \pi/2$, то текущее значение обратной связи вычисляется по линейной модели, т.е. используется решение задачи:

$$\rho = \rho_{\Theta}(z) = \min_u |u(t)|,$$

$$m_1 l^2 \ddot{x}_1 = -m_1 g l x_1 - k l^2 m_1 (x_1 + x_2) + u, \quad m_2 l^2 \ddot{x}_2 = -m_2 g l x_2 - k l^2 m_2 (x_1 + x_2),$$

$$x_1(0) = z_1, \quad \dot{x}_1(0) = z_2, \quad x_2(0) = z_3, \quad \dot{x}_2(0) = z_4, \quad x_1(\Theta) = 0, \quad \dot{x}_2(\Theta) = 0, \quad x_2(\Theta) = 0, \quad \dot{x}_2(\Theta) = 0,$$

$$|u(t)| \leq \rho, \quad t \in T = [0, \Theta].$$

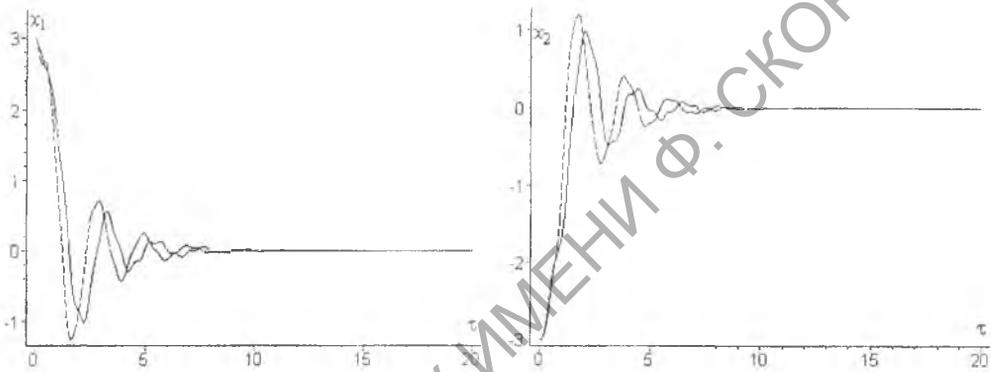


Рис. 3: Траектории системы для начального состояния $(3, 0, -3, 0)$

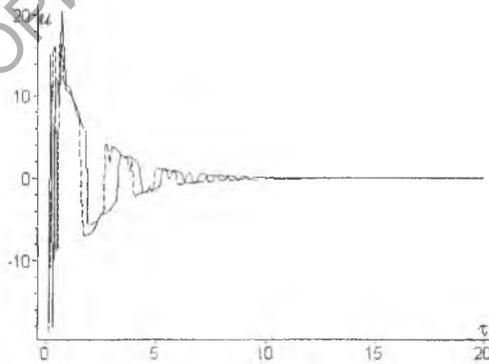


Рис. 4: Реализованное управление для начального состояния $(3, 0, -3, 0)$

Описанная процедура была реализована на ЭВМ. На рис. 3 представлены траектории системы. Штриховые линии соответствуют замкнутой кусочно-линейной системе, сплошные — поведению нелинейной системы (1), замкнутой обратной связью (11). На рис. 4 представлено реализованное управление, соответствующее этим траекториям. Из рисунков видно, что обратная связь, построенная по кусочно-линейной аппроксимации, хорошо гасит колебания и в исходной нелинейной системе, даже если исходные состояния удалены от состояния равновесия.

Abstract. The problem of construction of limited damped feedback in one nonlinear system of the fourth order is considered. For the decision of the problem the positional solution of an auxiliary problem of the optimum control – the problem of intensity minimization is used. The results of damper work are given.

Литература

1. Н. Н. Красовский, Проблемы стабилизации управляемых движений / И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Москва, Наука, 1966.
2. Ф. Л. Черноушко, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов, Управление колебаниями, Москва, Наука, Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1980.
3. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Москва, Наука, 1969.
4. Н. Н. Красовский, Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата, Москва, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.
5. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. А. Ружицкая, Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях, Изв. РАН, Теория и системы управления, № 1 (2001), 29-38.
6. R. Gabasov, F. M. Kirillova, Real-time construction of optimal closable feedbacks, 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, V.D., San Francisco, CA, USA. 1996.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.05.06

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ