Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(37), 2006

Математика

УДК 512.542

Модели на классах групп и произведения конечных групп

А. В. Акулич, А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, Д. Н. Симоненко

1. Введение. При изучении групп $G = AB$, являющихся произведением своих подгрупп A и B, довольно распространенным является нахождение утверждений о том, что если подгруппы A и B принадлежат данному классу $\mathfrak{X}$, то и $G \in \mathfrak{X}$. Наблюдающийся параллелизм в рассуждениях при доказательстве теорем указанного выше типа (см., например, [1-6]) приводит к задаче построения общей схемы (формализации) доказательства отмеченных выше утверждений. Рассмотрению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Пусть отображение Δ ставит в соответствие каждой группе G из данного класса $\mathfrak{X}$ некоторое бинарное отношение на множестве подгрупп группы G. Через Δ_G будем обозначать значение отображения Δ на группе $G \in \mathfrak{X}$. Пару $(\Delta, \mathfrak{X})$ будем называть моделью на классе $\mathfrak{X}$.

Определение 1.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый гомоморф. Модель $(\Delta, \mathfrak{X})$ будем называть F-моделью, если выполняются следующие утверждения:*

1) если группа $G \in \mathfrak{X}$ и $(A, B) \in \Delta_G$, то $(B, A) \in \Delta_G$;

2) если группа $G \in \mathfrak{X}$ и $(A, B) \in \Delta_G$, то $G = AB$;

3) если группа $G \in \mathfrak{X}$ и U — подгруппа группы G, то $(U, G) \in \Delta_G$;

4) если φ — эпиморфизм группы $G \in \mathfrak{X}$ и $(A, B) \in \Delta_G$, то $(A^\varphi, B^\varphi) \in \Delta_{G^\varphi}$.

Будем говорить, что подгруппы A и B группы G нормально перестановочны, если A перестановочна с каждой нормальной подгруппой из B и B перестановочна с каждой нормальной подгруппой из A.

Определение 1.2. *F-модель $(\Delta, \mathfrak{X})$ будем называть FNP-моделью, если выполняется утверждение:*

5) если $\mathfrak{X}$-группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $(A, B) \in \Delta_G$, причем A и B — собственные подгруппы группы G, то $\{N \cap A, N \cap B\} \subseteq \{N, 1\}$ и подгруппы A и B нормально перестановочны с N.

Цель статьи — доказать следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, имеющих ca-разрешимый коммутант и $(\Delta, \mathfrak{X})$ — FNP-модель. Если $(A, B) \in \Delta_G$, где A и B — c-сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является c-сверхразрешимой группой.*

2. Основная часть. В работе рассматриваются только конечные группы. Используется терминология и результаты из [7-8]. Через $\mathfrak{N}_p$ обозначается класс всех p-групп для некоторого простого числа p; через $\mathfrak{E}$ — класс всех групп; через $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп; через $\mathfrak{A}_{(p-1)}$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Согласно В.А.Ведерникову [9], группа G называется ca-разрешимой, если G обладает главным рядом, каждый абелевый фактор которого централен в G; c-сверхразрешимой.

если G обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами; ca-сверхразрешимой, если G является c-сверхразрешимой и ca-разрешимой группой одновременно. Через $\mathfrak{S}_{ca}$ обозначается класс всех ca-разрешимых групп; через $\mathfrak{U}_c$ — класс всех c-сверхразрешимых групп; через $\mathfrak{U}_{ca}$ — класс всех ca-сверхразрешимых групп. В [9] установлено, что классы $\mathfrak{S}_{ca}$, $\mathfrak{U}_c$ и $\mathfrak{U}_{ca}$ являются формациями Фиттинга.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие результаты, некоторые из них имеют самостоятельное значение.

Лемма 2.1 [2, лемма 1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и N — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Лемма 2.2 [2, теорема 1]. *Формация $\mathfrak{U}_c$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что*

$$h(N) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_{(p-1)}, & \text{если } N \text{ — простая } p\text{-группа}, \\ \mathfrak{U}_c, & \text{если } N \text{ — простая неабелева группа}. \end{cases}$$

Лемма 2.3. *Пусть $G = AN$, где N — элементарная нормальная подгруппа группы G и $A \cap N = 1$. Если A c-сверхразрешима, а A и N нормально перестановочны, то G c-сверхразрешима.*

Доказательство. Подгруппа $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — попарно изоморфные простые группы. Доказательство проведем индукцией по k. Так как по условию AN_1 — подгруппа G, то $N \cap AN_1 = (N \cap A)N_1 = N_1$. Откуда следует, что N_1 нормальна в G. По индукции G/N_1 c-сверхразрешима. Так как N_1 — простая группа, то G c-сверхразрешима. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть $(\Delta, \mathfrak{E})$ — FNP-модель. Если группа G имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{U}_c$ и $(A, B) \in \Delta_G$, где A и B c-сверхразрешимы, то G c-сверхразрешима.*

Доказательство. Если $N = G$, то $G = \mathfrak{U}_c$. Пусть $N \neq G$ и $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые группы. Ввиду условия 5) определения FNP-модели либо $N \subseteq A$, либо $N \cap A = 1$. Тогда по лемме 2.3 AN c-сверхразрешима. Аналогично подгруппа BN c-сверхразрешима. Отсюда нетрудно вывести, что N_i — нормальная подгруппа в AN и в BN, а значит, и в G. Так как N — минимальная нормальная подгруппа в G, то $k = 1$, а значит, G c-сверхразрешима. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{H}$ — подформация из $\mathfrak{A}$. Если $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$, $G = AB$ и $A, B \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть группа G — контрпример минимального порядка и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ и можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Если N — p-группа, то $(G/N)^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}N/N \simeq G^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \cap N \in \mathfrak{N}_p$. Откуда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$, т.е. $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $O_p(G) = 1$, а значит, N — q-группа, где q — простое число, отличное от p. Тогда G — абелева группа и $A, B \in \mathfrak{H}$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то G — циклическая q-группа. Но тогда из $G = AB$ получаем либо $G = A \in \mathfrak{H}$, либо $G = B \in \mathfrak{H}$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $(\Delta, \mathfrak{S}_{ca}\mathfrak{A})$ — FNP-модель. Пусть $(A, B) \in \Delta_G$, где A, B — c-сверхразрешимые подгруппы в G и $\mathfrak{S}_{ca}\mathfrak{A}$-группа G — контрпример минимального порядка, для которой утверждение теоремы неверно. Учитывая определение FNP-модели и то, что $\mathfrak{U}_c$ и $\mathfrak{S}_{ca}\mathfrak{A}$ являются формациями, можно считать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = G^{\mathfrak{U}_c}$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Покажем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Обозначим $\mathfrak{A}$-корадикал группы G через T. Так как $T \in \mathfrak{S}_{ca}$, то $C_T(U/V) = T$ для любого T-главного фактора U/V группы N. Ввиду леммы 2.1 получаем $T/C_T(N) \in \mathfrak{N}_p$. Тогда группа $G/C_T(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Отсюда и из $C_T(N) \subseteq C_G(N)$ следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$.

Рассмотрим $H = AN$ и $R = BN$. Учитывая условие 5) определения 1.2 и лемму 2.3, получаем, что H и R являются c-сверхразрешимыми подгруппами. Возьмем максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{U}_c$. Так как $H \in \mathfrak{U}_c$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$ для любого H-главного фактора U/V группы N. По лемме 2.2 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_{(p-1)}$. Аналогично, $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_{(p-1)}$. Поскольку $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$, то по лемме 2.5 заключаем $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_{(p-1)} = h(p)$. Это означает, что фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_c$ получаем $G \in \mathfrak{U}_c$. Противоречие.

Если N неабелева, то по лемме 2.4 группа $G \in \mathfrak{U}_c$. Противоречие с выбором G. Теорема доказана.

3. Заключительные выводы. Рассмотрим некоторые приложения теоремы 1.3.

3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф и $(\Delta, \mathfrak{X})$ — такая модель на $\mathfrak{X}$, что, если $(A, B) \in \Delta_G$ и $G \neq A \neq B \neq G$, то $A \lhd G$, $B \lhd G$. Нетрудно проверить, что $(\Delta, \mathfrak{X})$ является FNP-моделью. Для данной модели из теоремы 1.3 вытекают следующие утверждения.

Следствие 3.1.1. *Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G. Если G имеет ca-разрешимый коммутант, а A, B — c-сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является c-сверхразрешимой группой.*

Так как всякая квазинильпотентная группа является ca-разрешимой, то справедливо следующее

Следствие 3.1.2. *Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G. Если G имеет квазинильпотентный коммутант, а A, B — c-сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является c-сверхразрешимой группой.*

Следующее следствие — известный результат, полученный Р.Бэром в [10].

Следствие 3.1.3. *Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G. Если G имеет нильпотентный коммутант, а A, B — сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является сверхразрешимой группой.*

3.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф и $(\Delta, \mathfrak{X})$ — такая модель на $\mathfrak{X}$, что если $(A, B) \in \Delta_G$ и $G \neq A \neq B \neq G$, то A и B взаимно перестановочны, т.е. $UB = BU$ и $AV = VA$ для любых подгрупп $U \subseteq A$ и $V \subseteq B$. Ввиду (vii) леммы 1 из [5] $(\Delta, \mathfrak{X})$ является FNP-моделью. Для данной FNP-модели из теоремы 1.3 вытекают следующие результаты.

Следствие 3.2.1. *Пусть $G = AB$ есть произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если G имеет ca-разрешимый коммутант, а A, B — c-сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является c-сверхразрешимой группой.*

Следствие 3.2.2 [4, теорема 5]. *Пусть $G = AB$ есть произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если G имеет квазинильпотентный коммутант, а A, B — c-сверхразрешимые подгруппы группы G, то G является c-сверхразрешимой группой.*

Abstract. The paper considers some sufficient conditions for groups $G = AB$ with c-supersoluble factors A and B to be c-supersoluble.

Литература

1. M.Asaad and A.Shalaan, On the supersolvability of finite groups, Arch. Math., 276 (1989), 318–326.

2. А.Ф.Васильев, Т.И.Васильева, О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами, Известия вузов, Математика, 426, № 11 (1997), 10–14.

3. A.Ballester-Bolinches, M.C.Pedraza-Aguilera, M.D.Perez-Ramos, Mutually permutable products of finite groups, J.Algebra, 213, № 1 (1999), 369–377.

4. A.Ballester-Bolinches,John Cossey, M.C.Pedraza-Aguilera, On mutually permutable products of finite groups, J.Algebra, 294 (2005), 189–198.

5. J.C. Beidleman and H.Heineken, Mutually permutable subgroups and groups classes, Arch. Math., 85 (2005), 18–30.

6. J.C. Beidleman, H.Heineken, Groups classes and mutually permutable products, J.Algebra, 297 (2006), 409–416.

7. Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

8. K.Doerk,T.Hawkes, Finite soluble groups, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

9. В.А. Ведерников, О некоторых классах конечных групп, Доклады НАН Беларуси, 32, № 10 (1988), 872–875.

10. R. Baer, Classes of finite groups and their properties, Illinois J. Math., 1, (1957), 115–187.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.05.06