Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(37), 2006

УДК 519.2

Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания

А. Н. Старовойтов

1. Введение. В работах [1–4] исследовались марковские сети, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в "щадящем" режиме. Однако в указанных работах предполагалось, что длительности обслуживания заявок и длительности пребывания прибора узла в режимах имеют показательное распределение. В настоящей работе рассматриваются аналогичные сети, в которых количество работы по обслуживанию заявок в узлах и количество работы по переключению прибора с одного режима на другой имеют произвольные законы распределения, при этом обслуживание заявок и переключение режимов происходит с переменными скоростями, зависящими от состояния узла. Доказывается, что в этом случае стационарное распределение сохраняет свой вид.

2. Постановка задачи. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов. Поступающий в нее поток заявок – простейший с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0l} направляется в l-й узел ($l = \overline{1,N}; \sum_{l=1}^{N} \pi_{0l} = 1$). Заявка, обслуженная в l-м узле, мгновенно с вероятностью π_{lk} направляется в k-й узел, а с вероятностью π_{l0} — покидает сеть ($l = \overline{1,N}; \sum_{k=0}^{N} \pi_{lk} = 1$). В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах. Состояние l-го узла характеризуется парой чисел $x_l = (i_l, j_l)$, где i_l – число заявок в l-м узле, j_l – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l = \overline{1,N}; j_l = \overline{0,r_l}$).

Назовем 0 основным режимом работы. Количество работы, необходимое для перехода прибора l-го узла в режим 1, является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0,t)$ и математическим ожиданием $\eta_l(0)$, при этом, если в момент времени t в узле находится i_l заявок, то указанный переход происходит со скоростью $\nu_l(i_l, 0) + \varphi_l(i_l, 0)$. Для состояния (i_l, j_l), у которого $1 \le j_l \le r_l - 1$, количество работы, необходимое для изменения режима (на $j_l - 1$ или $j_l + 1$), также является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l, t)$ и математическим ожиданием $\eta_l(j_l)$. Если в момент времени t состояние узла есть (i_l, j_l), то изменение режима происходит со скоростью $\nu_l(i_l, j_l) + \varphi_l(i_l, j_l)$, при этом с вероятностью $\nu_l(i_l, j_l)/(\nu_l(i_l, j_l) + \varphi_l(i_l, j_l))$ прибор l-го узла переходит в режим $j_l + 1$, а с вероятностью $\varphi_l(i_l, j_l)/(\nu_l(i_l, j_l) + \varphi_l(i_l, j_l))$ – в режим $j_l - 1$. И аналогично, количество работы, необходимое для перехода прибора l-го узла из режима r_l в $r_l - 1$, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l, t)$ и математическое ожидание $\eta_l(r_l)$, при этом, если в момент времени t в узле находится i_l заявок, то указанный переход происходит со скоростью $\nu_l(i_l, r_l) + \varphi_l(i_l, r_l)$. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется.

Дисциплина обслуживания заявок в узлах имеет следующую специфику. Заявка, поступающая в некоторый узел, обладает абсолютным приоритетом по отношению ко всем остальным заявкам, находящимся в узле. Вытесненная с прибора заявка вклинивается в начало очереди, сдвигая стоящие в ней заявки, причем при повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время в режиме, в котором работал прибор на момент указанного поступления.

Если в момент времени t состояние l-го узла есть вектор (i_l, j_l) и сразу после указанного момента в этот узел поступает требование, которое начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по его обслуживанию является случайной величиной с функцией распределения $B_l(i_l+1, z)$ и математическим ожиданием $\tau_l(i_l+1) < \infty$. Если в момент времени t состояние l-го узла есть (i_l, j_l), то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_l(i_l, j_l)$, т.е. зависит от состояния узла.

Будем предполагать, что матрица (π_{lk}), где $l, k = \overline{0, N}$, неприводима ($\pi_{00} = 0$). Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \pi_{0l} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \pi_{kl}, \quad l = \overline{1, N} \tag{1}$$

имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_l,\ l = \overline{1, N})$.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ – состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным, здесь $i_l(t)$ – число заявок в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – номер режима работы l-го узла в момент времени t.

Цель работы – доказать инвариантность стационарного распределения $x(t)$ по отношению к виду распределений длительностей обслуживания и к виду распределений времен пребывания в режимах при фиксированных математических ожиданиях.

3. Марковский случай. Пусть длительности обслуживания заявок в узлах и длительности пребывания в режимах имеют показательное распределение, т.е. для l-го узла $B_l(i_l, j_l, t) = 1 - exp\{-\mu_l(i_l, j_l)t\}$ $(t > 0)$ и $\Phi_l(i_l, j_l, t) = 1 - exp\{-(\nu_l(i_l, j_l) + \varphi_l(i_l, j_l))t\}$ $(t > 0)$. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) | i_l = 0, 1, \ldots; j_l = \overline{0, r_l}\}$.

В работе [1] установлено, что при выполнении условий

$$\nu_l(i_l, j_l - 1)\mu_l(i_l, j_l)\varphi_l(i_l - 1, j_l) = \nu_l(i_l - 1, j_l - 1)\mu_l(i_l, j_l - 1)\varphi_l(i_l, j_l),$$

$$i_l \geq 1, \quad 1 \leq j_l \leq r_l, \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^{N} \left((\lambda \varepsilon_l)^{i_l} \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(0, k-1)\varphi_l^{-1}(0, k) \prod_{s=1}^{i_l} \mu_l^{-1}(s, j_l) \right) < \infty$$

процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N).$$

При этом

$$p_l(i_l, j_l) = \left((\lambda \varepsilon_l)^{i_l} \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(0, k-1)\varphi_l^{-1}(0, k) \prod_{s=1}^{i_l} \mu_l^{-1}(s, j_l) \right) p_l(0, 0),$$

где $q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^{N} \left(\mu_l(i_l, j_l) + \nu_l(i_l, j_l) + \varphi_l(i_l, j_l) \right)$, а $(\varepsilon_l,\ l = \overline{1, N})$ – положительное решение уравнения трафика (1).

4. Немарковский случай. Пусть теперь количество работы по обслуживанию заявки прибором l-го узла имеет произвольную функцию распределения $B_l(i_l, t)$, а количество работы, требуемое для перехода прибором l-го узла в другой режим – $\Phi_l(j_l, t)$, когда состояние l-го узла есть (i_l, j_l). Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. Если выполнены условия

$$\nu_l(i_l, j_l - 1)\alpha_l(i_l, j_l)\varphi_l(i_l - 1, j_l) = \nu_l(i_l - 1, j_l - 1)\alpha_l(i_l, j_l - 1)\varphi_l(i_l, j_l),$$

$$i_l \geq 1, \quad 1 \leq j_l \leq r_l, \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^{N} \left((\lambda\varepsilon_l)^{i_l} \eta_l(j_l) \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(0, k-1)\varphi_l^{-1}(0, k) \prod_{s=1}^{i_l} \tau_l(s)\alpha_l^{-1}(s, j_l) \right) < \infty,$$

где $q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^{N} \left(\tau_l^{-1}(i_l)\alpha_l(i_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l)\nu_l(i_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l)\varphi_l(i_l, j_l)\right)$, то процесс $x(t)$ эргодичен, при этом финальное стационарное распределение имеет вид

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\ldots p_N(x_N),$$

где

$$p_l(i_l, j_l) = \left((\lambda\varepsilon_l)^{i_l} \eta_l(j_l) \prod_{k=1}^{j_l} \nu_l(0, k-1)\varphi_l^{-1}(0, k) \prod_{s=1}^{i_l} \tau_l(s)\alpha_l^{-1}(s, j_l) \right) p_l(0, 0),$$

ε_l находятся из (1), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} (\lambda\varepsilon_l)^i \eta_l(j) \prod_{k=1}^{j} \nu_l(0, k-1)\varphi_l^{-1}(0, k) \prod_{s=1}^{i} \tau_l(s)\alpha_l^{-1}(s, j) \right)^{-1}, \quad l = \overline{1, N}.$$

Abstract. Open queueing networks with Poisson enter, Markov routing are considered in the paper. The amount of the work on serving customers has an arbitrary distribution. Single server nodes can operate in any mode, the amount of the work for switching from one mode to another also has an arbitrary distribution. Switching occurs only between the neighbouring modes.

Литература

1. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания, Весцi нацыянальнай акадэмii навук Беларусi, №3 (2001), 129–134.

2. Ю. В. Малинковский, А. А. Гаврилюк, Инвариантное распределение открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания с зависящими от состояния сети многорежимными стратегиями обслуживания, Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, №4(25) (2004), 124–128.

3. А. Ю. Нуеман, Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками, Вестник ТГУ, №1(1) (2002), 90–93.

4. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями, Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, №6(15) (2002), 183–188.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 16.05.06