УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ МАЙОРАНЫ – ОППЕНГЕЙМЕРА ВО ВСЕЛЕННОЙ АНТИ ДЕ СИТТЕРА

Е.М. Овсиюк

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE MAJORANA – OPPENHEIMER FORMALISM IN THE ANTI DE SITTER UNIVERSE

E.M. Ovsiyuk

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Построены точные решения уравнений Максвелла со сферической симметрией на фоне осциллирующей во времени Вселенной анти де Ситтера. Использован 3-мерный комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, обобщенный на псевдоримановы модели пространства-времени в соответствии с тетрадным рецептом. Установленный характер зависимости решений от времени приводит к независимости вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, т. е. факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Ключевые слова: *уравнения Максвелла, тетрадный формализм, Вселенная анти де Ситтера, нестатические координаты, комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, точные решения.*

Exact solutions with spherical symmetry of the Maxwell equations in the oscillating anti de Sitter Universe are constructed. 3-Dimensional complex formalism by Majorana – Oppenheimer, generalized to pseudo-Riemannian space-time models in accordance with the tetrad method, is applied. The established dependence of the constructed solutions on the time variable leads to independence of the Pointing vector on time. This means that the change in time of the anti de Sitter geometry cannot be seen by measuring the energy flow density.

Keywords: *Maxwell's equations, tetrad formalism, anti de Sitter Universe, non-static coordinates, complex formalism of the Majorana – Oppenheime, exact solutionsr.*

Введение

Цель настоящей работы − получение решений уравнений Максвелла в осциллирующей во времени Вселенной де Ситтера с метрикой

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t \times \\ \times\left[dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\right]; \qquad (0.1)$$

стоящее в квадратных скобках выражение представляет метрику гиперболической модели Лобачевского в сферической системе координат (используем безразмерные координаты).

Решение системы уравнений Максвелла является намного более сложной задачей, чем, например, решение уравнения скалярного поля или уравнения Дирака. Сложность задачи связана главным образом с большим числом полевых переменных: шестью при описании электромагнитного поля антисимметричным тензором второго ранга и десятью при использовании набора из тензора и 4-мерного электромагнитного вектора. В работе будем пользоваться формулировкой уравнений Максвелла, восходящей к комплексному формализму Римана − Зильберштейна − Оппенгеймера − Майораны [1]–[10] и обобщенной для применения в произвольном псевдоримановом пространстве-времени в соответствии с тетрадным рецептом Тетроде − Вейля − Фока − Иваненко [11]–[15]. Относительная простота этого формализма связана с тем, что вещественное электромагнитное 6-компонентное тензорное поле при этом описывается 3-мерным комплексным вектором. Это уменьшает количество уравнений и тем самым облегчает процедуру построения аналитических решений уравнений Максвелла.

1 Разделение переменных

Исходим из уравнений Максвелла в матричной тетрадной форме в римановом пространстве в формализме Майораны – Оппенгеймера (используем обозначения из [15])

$$\alpha^c \left(e^{\rho}_{(c)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \right) \Psi = 0,$$

$$\alpha^0 = -iI,$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

В более детальной записи это уравнение имеет вид:

$$-i\left(e^{\rho}_{(0)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} \right) \Psi + \\ +\alpha^k \left(e^{\rho}_{(k)} \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} \right) \Psi = 0. \qquad (1.1)$$

Приведем явный вид трех основных матриц α^k и трех генераторов S^k в декартовом базисе [15]:

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S^1 = j^{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{vmatrix}, \quad S^2 = j^{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{vmatrix},$$

$$S^3 = j^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Будем рассматривать уравнение (1.1) в нестатических координатах пространства анти де Ситтера (0.1); при этом используем тетраду

$$e^{\alpha}_{(0)} = (1,0,0,0),$$

$$e^{\alpha}_{(1)} = \left(0,0,\frac{1}{\cos t \sinh r},0\right),$$

$$e^{\alpha}_{(2)} = \left(0,0,0,\frac{1}{\cos t \sinh r \sin\theta}\right),$$

$$e^{\alpha}_{(3)} = \left(0,\frac{1}{\cos t},0,0\right).$$

Уравнение (1.1) в выбранных координатах и тетраде принимает следующий явный вид:

$$\left\{-i\frac{\partial}{\partial t} - i\tan t(\alpha^1 S^1 + \alpha^2 S^2 + \alpha^3 S^3) + \right.$$

$$+\frac{1}{\cos t}\left(\alpha^3\partial_r + \frac{\alpha^1 S^2 - \alpha^2 S^1}{\tanh r}\right) +$$

$$\left. +\frac{1}{\cos t \sinh r}\Sigma_{\theta\phi}\right\}\Psi = 0,$$

где зависящий от угловых переменных оператор $\Sigma_{\theta\phi}$ определен равенством

$$\Sigma_{\theta\phi} = \left(\alpha^1\frac{\partial}{\partial\theta} + \alpha^2\frac{\partial_\phi + S^3\cos\theta}{\sin\theta}\right). \qquad (1.2)$$

При разделении переменных удобно иметь матрицу j^{12} диагональной. Этого можно добиться с помощью преобразования к циклическому базису [15]:

$$\Psi' = U_4\Psi, \quad U_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{vmatrix},$$

$$U\tau_1 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} = \tau_1', \quad j'^{23} = s_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1' \end{vmatrix},$$

$$U\tau_2 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \tau_2', \quad j'^{31} = s_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2' \end{vmatrix},$$

$$U\tau_3 U^{-1} = -i\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \tau_3', \quad j'^{12} = s_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3' \end{vmatrix},$$

$$\alpha'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\alpha'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha'^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{vmatrix}.$$

Уравнение (1.2) примет в циклическом базисе тот же вид (для краткости штрихи будем опускать).

Диагонализуем на решениях квадрат и третью проекцию полного момента электромагнитного поля, этому отвечает подстановка для полевой функции

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi_1(t,r)D_{-1} \\ \varphi_2(t,r)D_0 \\ \varphi_3(t,r)D_{+1} \end{vmatrix},$$

где использованы краткие обозначения для D-функций Вигнера $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$, $\sigma = -1,0,+1$; j, m определяют квадрат и третью проекцию полного момента.

С применением рекуррентных соотношений для функций Вигнера [14]

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}\left(aD_{-2} - \nu D_0\right),$$

$$\frac{m-\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1} = \frac{1}{2}\left(aD_{-2} + \nu D_0\right),$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}\left(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}\right),$$

$$\frac{m}{\sin\theta}D_0 = \frac{1}{2}\left(\nu D_{-1} + \nu D_{+1}\right),$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}\left(\nu D_0 - aD_{+2}\right),$$

$$\frac{m+\cos\theta}{\sin\theta}D_{+1} = \frac{1}{2}\left(\nu D_0 + aD_{+2}\right),$$

$$\nu = \sqrt{j(j+1)}, \quad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}$$

получаем систему уравнений в переменных (t,r):

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\tanh r}\right)\varphi_2 + \frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}(\varphi_1 + \varphi_3) = 0,$$

$$-\left(\cos t\frac{\partial}{\partial t} - 2\sin t\right)\varphi_1 -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right)\varphi_1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}\varphi_2 = 0,$$

$$-\left(\cos t\frac{\partial}{\partial t}-2\sin t\right)\varphi_2+\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}(\varphi_1-\varphi_3)=0,$$
$$-\left(\cos t\frac{\partial}{\partial t}-2\sin t\right)\varphi_3+ \qquad (1.3)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tanh r}\right)\varphi_3+\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}\varphi_2=0.$$

2 Решение системы уравнений

Во всех трех функциях выделим множитель:

$$\varphi_j=\frac{1}{\cos^2 t}\frac{1}{\sinh r}F_j; \qquad (2.1)$$

в результате система (1.3) формально упрощается

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tanh r}\right)F_2+\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}(F_1+F_3)=0, \quad (2.2)$$
$$-\cos t\frac{\partial}{\partial t}F_1-\frac{\partial}{\partial r}F_1-\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}F_2=0, \quad (2.3)$$
$$-\cos t\frac{\partial}{\partial t}F_2+\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}(F_1-F_3)=0, \quad (2.4)$$
$$-\cos t\frac{\partial}{\partial t}F_3+\frac{\partial}{\partial r}F_3+\frac{\nu}{\sqrt{2}\sinh r}F_2=0. \quad (2.5)$$

Складывая и вычитая уравнения (2.3) и (2.5) с учетом (2.4), получим (введем промежуточное обозначение $\nu/\sqrt{2}=b$) два уравнения

$$-\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)-\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3)=0, \quad (2.6)$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1-F_3)+\frac{\partial}{\partial r}(F_1+F_3)+\frac{2b}{\sinh r}F_2=0.$$

Покажем, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). Для этого продифференцируем по времени уравнение (2.2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tanh r}\right)\frac{\partial}{\partial t}F_2+\frac{b}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=0.$$

Учитывая (2.4), получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tanh r}\right)\frac{b}{\cos t\sinh r}(F_1-F_3)+$$
$$+\frac{b}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=0$$

эквивалентное следующему уравнению:

$$\frac{b}{\cos t\sinh r}\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3)+\frac{b}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=0.$$

Если учесть здесь уравнение (2.6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=-\frac{1}{\cos t}\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3),$$

то придем к тождеству $0\equiv 0$. Это означает, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). В дальнейшем используем три (независимых) уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2=\frac{b}{\cos t\sinh r}(F_1-F_3),$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)+\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3)=0,$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1-F_3)+\frac{\partial}{\partial r}(F_1+F_3)+\frac{2b}{\sinh r}F_2=0. \quad (2.7)$$

Исключим функцию F_2 из третьего уравнения в (2.7); для этого продифференцируем его по времени и воспользуемся первым уравнением в (2.7):

$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1-F_3)+\cos t\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}(F_1+F_3)+$$
$$+\frac{2b^2}{\sinh^2 r}(F_1-F_3)=0.$$

Таким образом, вместо (2.7) имеем эквивалентную ей систему:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2=\frac{b}{\cos t\sinh r}(F_1-F_3),$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=-\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3),$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1-F_3)+$$
$$+\cos t\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}(F_1+F_3)+ \qquad (2.8)$$
$$+\frac{2b^2}{\sinh^2 r}(F_1-F_3)=0.$$

Из третьего уравнения в (2.8) можно с помощью второго уравнения в (2.8) исключить комбинацию (F_1+F_3):

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2=\frac{b}{\cos t\sinh r}(F_1-F_3),$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1+F_3)=-\frac{\partial}{\partial r}(F_1-F_3), \qquad (2.9)$$
$$\left(\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right)(F_1-F_3)=0.$$

Чтобы упростить обозначения введем функции:

$$F=F_1+F_3,\ \ G=F_1-F_3,$$

тогда система (2.9) переписывается следующим образом:

$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}F_2=\frac{b}{\sinh r}G,$$
$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}F=-\frac{\partial}{\partial r}G, \qquad (2.10)$$
$$\left(-\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right)G=0.$$

В новой переменной

$$d\tau=\frac{dt}{\cos t}$$

система (2.10) представима в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right)G=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_2=\frac{b}{\sinh r}G,\ \ \frac{\partial}{\partial\tau}F=-\frac{\partial}{\partial r}G.$$

Решим уравнение для функции G методом разделения переменных:

$$G = T(\tau)R(r),$$

$$\frac{1}{T(\tau)}\frac{d^2}{d\tau^2}T(\tau) = \frac{1}{R(r)}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r}\right)R(r) = -\omega^2,$$

введена постоянная разделения ω^2; далее получаем

$$T(\tau) = e^{-i\omega\tau},$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r}\right)R(r) = 0.$$

Чтобы решить уравнение в радиальной переменной, введем новую переменную $z = 1 - e^{-2r}$:

$$4(1-z)^2\frac{d^2R}{dz^2} - 4(1-z)\frac{dR}{dz} + \omega^2 R - \frac{4(1-z)\nu^2}{z^2}R = 0.$$

Для функции R вводим подстановку $R = z^a(1-z)^b f(z)$:

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a+2b+1)z]\frac{df}{dz} +$$
$$+\left[-\frac{\omega^2}{4} - (a+b)^2 + \right.$$
$$\left. +(a(a-1) - \nu^2)\frac{1}{z} + \left(b^2 + \frac{\omega^2}{4}\right)\frac{1}{1-z}\right]f = 0.$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать $a = j+1, -j,\ b = \pm i\omega/2$. В результате для функции f получаем уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[2a - (2a+2b+1)z\right]\frac{df}{dz} -$$
$$-\left[(a+b)^2 + \frac{\omega^2}{4}\right]f = 0,$$

которое является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]F' - \alpha\beta F = 0.$$

Параметры определяются соотношениями

$$\gamma = 2a,\ \alpha = a + b - \frac{i\omega}{2},\ \beta = a + b + \frac{i\omega}{2}. \quad (2.11)$$

Выбор $a = j+1, -j, b = \pm i\omega/2$ обеспечивает, что по радиальной переменной построены регулярные в нуле вещественные решения, соответствующие стоячим волнам. Кроме того, очевидно, что установленный характер зависимости решений от времени означает независимость вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, другими словами, факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Заключение

Исходная нестатическая метрика (0.1) после преобразования к использованной выше временной координате τ (см. (2.11)) примет вид

$$dS^2 = \cos^{-2}\tau \times$$
$$\times\left[d\tau^2 - (dr^2 + \sinh^2 r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right].$$

Эта метрика отличается конформным множителем $\cos^{-2}\tau$ от метрики статической Вселенной Эйнштейна [16]. Построенные решения в осциллирующей модели де Ситтера связаны конформным преобразованием с решениями уравнений Максвелла в статической Вселенной Лобачевского (формула (2.1)).

Заметим также, что поскольку формализм Майораны – Оппенгеймера использует только составляющие электромагнитного тензора, то этот подход не позволяет следить за калибровочными степенями свободы электромагнитного поля. Такой анализ выполним на основе 10-мерного формализма.

Аналогичный анализ может быть выполнен в случае расширяющейся Вселенной де Ситтера [17], когда исходная метрика пространства-времени задается выражением

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 t[dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)],$$

которое приводится преобразованием временной координаты к виду

$$dS^2 = \cos^{-2}\tau\left[d\tau^2 - (dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right].$$

Эта метрика отличается от статической метрики Эйнштейна конформным множителем $\cos^{-2}\tau$.

Добавим, что запас систем координат в 3-мерных пространствах Лобачевского и Римана достаточно велик [18]; любая из них может использоваться при рассмотрении волновых уравнений (Максвелла, Дирака и других) в нестатических моделях де Ситтера. Можно утверждать, что в случае электромагнитного поля из факта конформной инвариантности уравнений Максвелла следует возможность построения решений в моделях де Ситтера, если удается построить соответствующие решения в статических моделях Лобачевского – Римана.

Автор благодарна В.М. Редькову за советы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weber*, *H.* Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901.

2. *Silberstein*, *L.* Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. Phys. (Leiptzig). – 1907. − Vol. 22. – P. 579–586.

3. *Silberstein*, *L.* Nachtrag zur Abhandlung Über elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24. – P. 783–784.

4. *Silberstein, L.* The Theory of Relativity / L. Silberstein. – London: Macmillan, 1914.

5. *Bateman*, *H.* The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of

Maxwells Equations / H. Bateman. – Cambridge: University Press, 1915.

6. *Majorana*, *E.* Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana». Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16;17, p. 83, 159.

7. *Oppenheimer*, *J.* Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Phys. Rev. − 1931. − Vol. 38. − P. 725−746.

8. *Bialynicki-Birula*, *I.* On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Polon. − 1994. − Vol. 86. − P. 97−116.

9. *Bialynicki-Birula*, *I.* Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. − 1996. − Vol. 36. − P. 248−294.

10. *Rodrigues*, *W.A.* The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations / W.A. Rodrigues, E.C. de Oliveira // Lecture Notes in Physics. – Springer. – 2007. – Vol. 722.

11. *Maxwell Equations in Complex form of Majorana – Oppenheimer*, *Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann* S_3 *and Lobachevsky* H_3 *spaces* / A.A. Bogush, G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. − 2010. − Vol. 59, № 1. − P. 59−96.

12. *Red'kov*, *V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part I. Minkowski Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2012. – Vol. 22. – P. 1129–1149.

13. *Red'kov*, *V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part II. Curved Riemannian Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – Vol. 23. – P. 165–178.

14. *Redkov*, *V.M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Redkov, E.M. Ovsiyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

15. *Овсиюк*, *Е.* Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией / Е. Овсиюк, В. Редьков. – 2-е изд. – Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 242 с.

16. *Hawking*, *S.W.* The large scale structure of space-time / S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. − Cambridge: University Press, 1973.

17. *Electromagnetic Field on de Sitter Expanding Universe: Majorana – Oppenheimer Formalism, Exact Solutions in non-Static Coordinates* / O.V. Veko, N.D. Vlasii, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, Yu.A. Sitenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. − Vol. 17, № 1. – P. 17–39.

18. *Олевский*, *М.Н.* Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М.Н. Олевский // Мат. Сб. – 1950. – Т. 27. − С. 379–426.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*грант* Ф14АРМ-021) *в рамках сотрудничества между Беларусью и Арменией.*

Поступила в редакцию 18.03.15.