Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(37), 2006

УДК 512.542

Тотально насыщенные формации с метанильпотентным l_∞-дефектом $\leqslant 2$

В. Г. Сафонов

1 Введение. Определения и обозначения

Все рассматриваемые группы конечны. Мы придерживаемся терминологии принятой в [1–3].

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — некоторые тотально насыщенные формации. Тогда длину решетки $\mathfrak{F}/_\infty\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ (конечную или бесконечную) тотально насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, называют *$\mathfrak{H}_\infty$-дефектом* формации $\mathfrak{F}$ и обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|_\infty$. В случае когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^2$ — формация всех метанильпотентных групп $\mathfrak{N}^2_\infty$-дефект тотально насыщенной формации будем называть её *метанильпотентным l_∞-дефектом.*

В 1997г. А.Н.Скибой [3] было получено описание разрешимых тотально насыщенных формаций с нильпотентным l_∞-дефектом $\leqslant 2$. В работе автора [4] изучались тотально насыщенные формации, у которых нильпотентный l_∞-дефект не превосходит 3.

Исследованию и классификации тотально насыщенных формаций, имеющих заданные ограничения на решетку их тотально насыщенных подформаций, а также изучению различных свойств решетки тотально насыщенных формаций, посвящены работы [2–10].

В настоящей статье дается описание тотально насыщенных формаций, имеющих метанильпотентный дефект $\leqslant 2$.

Напомним некоторые из используемых определений и обозначений [2, 3].

Всякую формацию конечных групп называют *0-кратно насыщенной.* При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно насыщенной*, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n называют *тотально насыщенной.*

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{M}$ через $l_\infty\mathrm{form}\mathfrak{M}$ обозначают *тотально насыщенную формацию, порожденную классом групп* $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех тотально насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{M}$. При этом, если $\mathfrak{M} = \{G\}$, то формацию $l_\infty\mathrm{form}G$ называют *однопорожденной* тотально насыщенной формацией.

Для любых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M}\vee_\infty\mathfrak{H} = l_\infty\mathrm{form}(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H})$. Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех тотально насыщенных формаций l_∞ с операциями $\vee_\infty$ и $\cap$ образует полную решетку. Формации из l_∞ называют *l_∞-формациями.* Экран, все непустые значения которого l_∞-формации, называют *l_∞-значным.* Если $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация, то через $\mathfrak{F}_\infty$ обозначают её *минимальный l_∞-значный локальный экран.* Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}_\infty(p) = l_\infty\mathrm{form}(G/F_p(G) | G\in\mathfrak{X})$, если $p\in\pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_\infty(p) = \varnothing$, если $p\notin\pi(\mathfrak{X})$.

Тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют *$\mathfrak{H}_\infty$-критической* (или, иначе, *минимальной тотально насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией*), если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но все собственные тотально насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Тотально насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *неприводимой* (или *l_∞-неприводимой* формацией), если $\mathfrak{F} \neq l_\infty\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i) = \vee_\infty(\mathfrak{X}_i | i\in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i | i\in I\}$ — набор всех собственных тотально насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. В противном случае формация $\mathfrak{F}$ называется *приводимой* тотально насыщенной формацией (или *l_∞-приводимой* формацией).

Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n}$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) | A \in \mathfrak{X})$; 2) $\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = (A/F_{p_n}(A) | A \in \mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называют *подходящей* для $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число $p_i \in \pi(\mathfrak{X}^{p_1 p_2 \cdots p_{i-1}})$. Множество всех подходящих для $\mathfrak{X}$ последовательностей обозначают через $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$. Символом $\mathrm{P}^n(\mathfrak{X})$ обозначают совокупность всех таких последовательностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из $\mathrm{P}(\mathfrak{X})$, у которых $p_i \neq p_{i+1}$ при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторая подходящая для $\mathfrak{F}$ последовательность. Тогда тотально локальный экран $\mathfrak{F}_\infty p_1 p_2 \ldots p_n$ определяют следующим образом:

1) $\mathfrak{F}_\infty p_1 = (\mathfrak{F}_\infty(p_1))_\infty$;

2) $\mathfrak{F}_\infty p_1 \ldots p_n = (\mathfrak{F}_\infty p_1 \ldots p_{n-1}(p_n))_\infty$.

Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^2$ и $\mathfrak{S}$ обозначаются классы всех нильпотентных, метанильпотентных и разрешимых групп, $\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп, где π — некоторое непустое множество простых чисел.

2 Используемые результаты

В виде следующих лемм сформулируем некоторые известные результаты теории формаций, используемые в работе.

Лемма 1 [2, с.75]. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, h — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения:*

1) $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = h(p)$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

Лемма 2 [3, с. 33]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда если f — минимальный l_∞-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;

2) $f(p) = \mathfrak{X}_\infty(p) = \mathfrak{F}_\infty(p)$ при всех простых числах p;

3) если h — произвольный l_∞-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то при любом $p \in \pi(\mathfrak{X})$ имеет место $f(p) = l_\infty \mathrm{form}(A | A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1)$.

Лемма 3 [10]. *Пусть G — монолитическая группа, $R = \mathrm{Soc}(G)$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную l_∞-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty \mathrm{form}(G/R)$.* В частности, $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Лемма 4 [3, с. 94]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально локальная не $\mathfrak{N}^m$-формация, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1} \mathfrak{N}_{p_2} \ldots \mathfrak{N}_{p_{m+1}}$ для некоторой последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$ из $\mathrm{P}^{m+1}(\mathfrak{F})$.*

Лемма 5 [2, с.168]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{H}$ локальна и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$ и если $G^{\mathfrak{H}}$ - p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$.*

Лемма 6 [2, с.79]. *Пусть H/K главный фактор группы G, $p \in \pi(H/K)$. Тогда $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.*

Лемма 7 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — тотально насыщенные формации, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}_\infty$-критическая формация, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{X})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ для некоторых различных простых чисел p и q из $\pi(\mathfrak{X})$.

Лемма 8 [4]. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — l_∞-формации, $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee {}_\infty \mathfrak{F}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$. Тогда* *если* $\mathfrak{H}_\infty$*-дефект формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{F}$ *конечен, то*

$$|\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\infty = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\infty + |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty - |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\infty.$$

Лемма 9 [10]. *Для любых двух тотально насыщенных формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{F}$ *имеет место решеточный изоморфизм*

$$\mathfrak{M} \vee_\infty \mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}.$$

Следующая лемма непосредственно вытекает из леммы 5.2.7 [3].

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— l_∞-формации, где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. *Тогда*

$$|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\infty \leqslant |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\infty.$$

Лемма 11 [3, с. 94]. *Пусть* Θ *— такая полная решетка формаций, что* $\Theta^l \subseteq \Theta$. *Пусть* h *— канонический экран формации* $\mathfrak{H}$, f *— минимальный* Θ*-значный экран формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{H}_{\Theta^l}$*-критической формацией в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{F} = \Theta^l \mathrm{form} G$, *где* G *— такая группа минимального порядка из* $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ *с монолитом* $R = G^{\mathfrak{H}}$, *что для всех* $p \in \pi(R)$ *формация* $f(p)$ $(h(p))_\Theta$*-критична.*

Лемма 12 [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неразрешимая тотально насыщенная формация. Тогда в* $\mathfrak{F}$ *найдется по меньшей мере одна* $\mathfrak{S}_\infty$*-критическая подформация.*

Лемма 13 [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *— минимальная тотально насыщенная неразрешимая формация, когда* $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, *где* G *— такая монолитическая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой* R, *что группа* G/R *разрешима.*

Лемма 14 [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— тотально насыщенная формация. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ *имеет конечную длину;*

2) решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ *конечна;*

3) $\mathfrak{F}$ *— разрешимая однопорожденная* l_∞*-формация.*

3 Основной результат

Лемма 15. *Пусть* G *— такая монолитическая группа, что* $P = \mathrm{Soc}(G)$ *— абелева* p*-группа. Тогда если* $P \not\subseteq \Phi(G)$, *то* $l_\infty \mathrm{form} G = \mathfrak{N}_p l_\infty \mathrm{form}(G/P)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, $\mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form}(G/P)$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{L}$. Ввиду леммы 1 формация $\mathfrak{M}$ имеет такой l_∞-значный локальный экран m, что $m(p) = (1)\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ и $m(q) = \mathfrak{L}_\infty(q)$ для любого простого числа $q \neq p$. Так как по условию P — p-группа, то для любого $q \neq p$ имеем $P \subseteq F_q(G)$ и

$$(G/P)/F_q(G/P) = (G/P)/F_q(G)/P \simeq G/F_q(G).$$

Но тогда по лемме 2

$$m(q) = \mathfrak{L}_\infty(q) = l_\infty \mathrm{form}((G/P)/F_q(G/P)) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_q(G)) = \mathfrak{F}_\infty(q)$$

для любого простого числа $q \in \pi(G)$, $q \neq p$. Кроме того, поскольку $P \not\subseteq \Phi(G)$, то $P = C_G(P) = F_p(G)$ и

$$m(p) = \mathfrak{L} = l_\infty \mathrm{form}(G/P) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_p(G)) = \mathfrak{F}_\infty(p).$$

Таким образом, $m = \mathfrak{F}_\infty$. Последнее влечет $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неметанильпотентная тотально насыщенная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{N}^2_\infty$-критическая подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая l_∞-формация, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}^2$ группу минимального порядка A. Тогда A — монолитическая группа с монолитом $R = A^{\mathfrak{N}^2}$. Если R — неабелева группа, то $|\pi(R)| \geqslant 3$ и ввиду леммы 3 $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subset \mathfrak{F}$. Значит, если p, q и r — различные простые числа из $\pi(R)$, то $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{F}$ и, в силу леммы 4 $\mathfrak{X}$ — искомая $\mathfrak{N}^2_\infty$-критическая подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть R — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{N}^2$ имеем $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда согласно лемме 15 $l_\infty\mathrm{form}A = \mathfrak{N}_p l_\infty\mathrm{form}(A/R)$. Ввиду леммы 5 $R = C_G(R) = F_p(G)$. Поскольку по лемме 6 $O_p(A/R) = 1$ и A/R разрешимая группа, то любая минимальная нормальная подгруппа группы A/R является p'-группой. Поэтому $F(A/R) \in \mathfrak{N}_{p'}$. Так как $A/R \in \mathfrak{N}^2 \setminus \mathfrak{N}$, то $l_\infty\mathrm{form}(A/R) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{N}$. По лемме 7 в формации $l_\infty\mathrm{form}(A/R)$ содержится по меньшей мере одна минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{L}$. Согласно лемме 4 $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_r$, где q и r — различные простые числа. Так как $l_\infty\mathrm{form}(A/R) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{N}$, то $q \neq p$. Но тогда

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{N}_p l_\infty\mathrm{form}(A/R) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Ввиду леммы 4 $\mathfrak{X}$ — искомая минимальная тотально насыщенная неметанильпотентная формация. Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{F}|_\infty = 1$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee {}_\infty\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная тотально насыщенная формация, $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{N}^2_\infty$-критическая формация, при этом: 1) всякая метанильпотентная l_∞-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee {}_\infty(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2)$; 2) всякая неметанильпотентная l_∞-формация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee {}_\infty(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}^2)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация с $\mathfrak{N}^2_\infty$-дефектом 1. Так как $\mathfrak{F}$ неметанильпотентная формация, то по лемме 16 в $\mathfrak{F}$ содержится некоторая минимальная тотально насыщенная неметанильпотентная подформация $\mathfrak{H}$. По условию леммы $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ — максимальная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee {}_\infty\mathfrak{M}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee {}_\infty\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — минимальная тотально насыщенная неметанильпотентная формация, а $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная тотально насыщенная формация. Тогда ввиду леммы 8 $\mathfrak{N}^2_\infty$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1.

Установим теперь справедливость второй части леммы. В силу леммы 9 имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}/_\infty(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M} = ((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M}) \vee {}_\infty\mathfrak{H}/_\infty(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M} \simeq$$

$$\simeq \mathfrak{H}/_\infty\mathfrak{H} \cap ((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M}) = \mathfrak{H}/_\infty\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2.$$

Поскольку $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$ — максимальная тотально насыщенная подформация в $\mathfrak{H}$, то $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M}$ — максимальная тотально насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$, то любая метанильпотентная тотально насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}^2) \vee {}_\infty\mathfrak{M}$.

Допустим теперь, что в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная тотально насыщенная неметанильпотентная подформация $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_1 \neq \mathfrak{H}$.

Тогда $\mathfrak{H} \vee_\infty \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 8 $\mathfrak{N}^2_\infty$-дефект формации $\mathfrak{H} \vee_\infty \mathfrak{H}_1$ равен 2. Последнее противоречит лемме 10.

Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных тотально насыщенных неметанильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ произвольная неметанильпотентная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда, по лемме 16 и доказанному выше, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}$. Поэтому

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{L} \cap (\mathfrak{H} \vee {}_\infty\mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \vee {}_\infty(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}) =$$

$$= \mathfrak{H} \vee {}_\infty(\mathfrak{L} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2)) = \mathfrak{H} \vee {}_\infty(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}^2).$$

Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация, p — некоторое простое число. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$-формация, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}$, где p_1, p_2, p_3 — такая последовательность простых чисел из $\mathrm{P}^3(\mathfrak{F})$, что $p_1 \neq p$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$-формация. Обозначим через $\mathfrak{M}$ — единственную максимальную тотально насыщенную подформацию формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{M}_\infty$-критическая формация. По лемме 11 $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что для любого $p \in \pi(P)$ формация $\mathfrak{F}_\infty(p)$ является $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_\infty(p))_\infty$-критической.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Предположим противное. Тогда поскольку $G/P \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$, то P — неабелева группа и $|\pi(P)| \geqslant 3$. Ввиду леммы 3 $\mathfrak{S}_{\pi(P)} \subset \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{S}_{\pi(P)} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$.

Возможны следующие два случая: 1) $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$; 2) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Пусть имеет место 1). Тогда поскольку $\mathfrak{F}$ — $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2)_\infty$-критическая формация, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^3$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^3$. Так как $G \notin \mathfrak{N}^2$, то $l(G) = 3$ и $G \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^2$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Тогда

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2 = (\mathfrak{N}_q \cap \mathfrak{N}_p)\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}^2.$$

Противоречие.

Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^3$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^3$-формация. По лемме 4 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{N}_{p_4}$ для некоторой последовательности простых чисел p_1, p_2, p_3, p_4 из $\mathrm{P}^4(\mathfrak{F})$. Тогда поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}(\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{N}_{p_4}) = (\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3})\mathfrak{N}_{p_4}$ и $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3} \vee {}_\infty\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{N}_4 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^3$, то $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3} \vee {}_\infty\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{N}_4 \subset \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\dots\mathfrak{N}_{p_3} \vee {}_\infty\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}\mathfrak{N}_4 \subseteq \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$. Следовательно, $p_1 = p_2 = p$. Противоречие. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть имеет место 2). Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация. Ввиду леммы 4 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}$ для некоторой последовательности простых чисел p_1, p_2, p_3 из $\mathrm{P}^3(\mathfrak{F})$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$, то $p_1 \neq p$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию леммы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация из условия леммы. Тогда ввиду леммы 4 $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация. Поэтому любая собственная тотально насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{N}^2$ и, следовательно, в $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$. Так как при этом $p \neq p_1$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$. Значит, $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}^2$-формация. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда если $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 2$, то $\mathfrak{F}$ — разрешимая l_∞-приводимая формация.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{F}$ — l_∞-неприводимая формация и пусть $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $|\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 1$ и по лемме 17 $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}^2$. Так как в силу леммы 4 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{N}_{p_3}$, где p_1, p_2, p_3 — некоторая последовательность из $\mathrm{P}^3(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$.

Понятно, что $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{M}$-формация. Значит, по лемме 11 $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где G — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что для любого $q \in \pi(P)$ формация $\mathfrak{F}_\infty(p)$ является $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_\infty(p))_\infty$-критической.

Покажем прежде, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Допустим противное, тогда в силу леммы 12 в формацию $\mathfrak{F}$ входит по меньшей мере одна минимальная тотально насыщенная неразрешимая формация $\mathfrak{X}$. Согласно лемме 13 $\mathfrak{X} = l_\infty \mathrm{form} X$, где X — такая монолитическая группа с неабелевым монолитом Y, что группа X/Y разрешима. Так как Y — неабелева группа, то $|\pi(Y)| \geqslant 3$. Ввиду леммы 3 $\mathfrak{S}_{\pi(Y)} \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{S}_{\pi(Y)} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$. Получаем противоречие. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ разрешима.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$. Тогда поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$, то $l(G) = 3$ и $P = F_{p_1}(G)$ — p_1-группа. В силу леммы 15 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1} l_\infty \mathrm{form}(G/P)$.

Поскольку $\mathfrak{F}_\infty(p_1)$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{M}_\infty(p_1)$-формация, то применяя леммы 2 и 11 $\mathfrak{F}_\infty(p_1) = l_\infty \mathrm{form}(G/F_{p_1}(G)) = l_\infty \mathrm{form}(G/P) = l_\infty \mathrm{form} A$, где A — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_\infty(p_1) \setminus \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{M}_\infty(p_1)$ с монолитом $R = A^{\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{M}_\infty(p_1)}$, что для любого $q \in \pi(R)$ формация $\mathfrak{F}_\infty p_1(q)$ является $(\mathfrak{N}_q\mathfrak{M}_\infty p_1(q))_\infty$-критической. Поскольку $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация, то R — абелева q_1-группа для некоторого простого числа q_1. Так как $R \not\subseteq \Phi(A)$, то согласно лемме 15 $\mathfrak{F}_\infty(p_1) = l_\infty \mathrm{form} A = \mathfrak{N}_{q_1} l_\infty \mathrm{form}(A/F_{q_1}(A))$.

Снова применяя леммы 2 и 11 получаем, что

$$\mathfrak{F}_\infty p_1(q_1) = l_\infty \mathrm{form}(A/F_{q_1}(A)) = l_\infty \mathrm{form} B,$$

где B — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_\infty p_1(q_1) \setminus \mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{M}_\infty p_1(q_1)$ с монолитом $S = B^{\mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{M}_\infty p_1(q_1)}$, что для любого $q \in \pi(S)$ формация $\mathfrak{F}_\infty p_1 q_1(q)$ $(\mathfrak{N}_q\mathfrak{M}_\infty p_1 q_1(q))_\infty$-критична. Ввиду разрешимости формации $\mathfrak{F}$ получаем, что S — абелева q_2-группа, где $q_2 \in \pi(\mathfrak{F})$. Так как $S \not\subseteq \Phi(B)$, то по лемме 15 $\mathfrak{F}_\infty p_1(q_1) = l_\infty \mathrm{form} B = \mathfrak{N}_{q_2} l_\infty \mathrm{form}(B/F_{q_2}(B))$. Поэтому

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1} l_\infty \mathrm{form} A = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{q_1} l_\infty \mathrm{form} B = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{N}_{q_2} l_\infty \mathrm{form}(B/F_{q_2}(B)).$$

Поскольку $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{N}_{q_2} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^3$, то $l_\infty \mathrm{form}(B/F_{q_3}(B)) = (1)$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{N}_{q_2}$. Но тогда согласно лемме 4 $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация. Следовательно, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 1$. Противоречие.

Значит, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально локальная не $\mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2$-формация. Ввиду леммы 18 $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{N}_{q_2}\mathfrak{N}_{q_3}$, где $q_1 \neq p_1$.

Тогда

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{q_1}\mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{N}^2 = (\mathfrak{N}_{q_1} \cap \mathfrak{N}_{p_1})\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}^2.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 2$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty\mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные тотально насыщенные неметанильпотентные формации, $\mathfrak{M}$ — метанильпотентная тотально насыщенная формация.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация с метанильпотентным l_∞-дефектом 2. Согласно лемме 19 $\mathfrak{F}$ — разрешимая l_∞-приводимая формация. Обозначим через $\mathfrak{M}$ — такую максимальную тотально насыщенную подформацию формации $\mathfrak{F}$, что $|\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 1$. По лемме 17 $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ —

минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}^2$. Так как ввиду леммы 8 $\mathfrak{M} \vee {}_\infty(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2)$ — формация $\mathfrak{N}^2_\infty$-дефекта 1, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — l_∞-приводимая формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ найдется такая группа A, что $\mathfrak{X} = l_\infty \mathrm{form} A \neq \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee {}_\infty \mathfrak{M}$.

Ввиду леммы 10 $d = |\mathfrak{X} : \mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty \leqslant 2$. Если $d = 0$, то по лемме 8 $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 1$, что невозможно. Пусть $d = 1$. Тогда в силу леммы 17 $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{H}_2$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация, $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}^2$. Если $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1$, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee {}_\infty \mathfrak{M} = (\mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_2) \vee {}_\infty (\mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_1.$$

Снова применяя лемму 17 имеем $d = 1$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{H}_2 \neq \mathfrak{H}_1$. Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee {}_\infty \mathfrak{M} = (\mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_2) \vee {}_\infty (\mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_1) = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty (\mathfrak{M}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_2)$$

и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь $d = 2$. Так как $\mathfrak{X}$ разрешимая однопорожденная тотально насыщенная формация, то согласно лемме 14 в формации $\mathfrak{X}$ содержится конечное число m тотально насыщенных подформаций. Индукцией по m покажем, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $\mathfrak{L}$ — такая максимальная тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}$, что $|\mathfrak{L} : \mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 1$. Согласно лемме 17 $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_3$, где $\mathfrak{H}_3$ — минимальная тотально насыщенная не $\mathfrak{N}^2$-формация, $\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Поскольку ввиду леммы 19 $\mathfrak{X}$ — l_∞-приводимая формация, то в $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{L}$ найдется группа B такая, что $\mathfrak{X}_1 = l_\infty \mathrm{form} B \neq \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1$. Пусть $d_1 = |\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{N}^2|_\infty$. Рассуждая для формации $\mathfrak{X}_1$ также как для $\mathfrak{X}$ получим, что при $d_1 < 2$ формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $d_1 = 2$. Если $\mathfrak{H}_3 \not\subseteq \mathfrak{X}_1$, то в силу леммы 9 $d_1 = 3$. Получаем противоречие. Поэтому $\mathfrak{H}_3 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Заметим также, что $\mathfrak{M}_3 \not\subseteq \mathfrak{X}_1$. Поскольку в противном случае $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{X}_1$, что противоречит максимальности формации $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1 = (\mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_3) \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{M}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1.$$

Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee {}_\infty \mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee {}_\infty (\mathfrak{M}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1) = \mathfrak{M} \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1 = (\mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_1) \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1.$$

Так как $\mathfrak{M}_3 \not\subseteq \mathfrak{X}_1$, то число тотально насыщенных подформаций формации $\mathfrak{X}_1$ меньше m. По индукции мы можем считать, что $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_4$, где $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$ — различные $\mathfrak{N}^2_\infty$-критические формации, а $\mathfrak{M}_4 \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Если $\mathfrak{H}_1 \not\subseteq \mathfrak{X}_1$, то по лемме 8 $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 3$. Последнее противоречит условию. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Поэтому

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{M}_1 \vee {}_\infty (\mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_4) = \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_3 \vee {}_\infty (\mathfrak{M}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{M}_4),$$

т.е. формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2 \vee {}_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные $\mathfrak{N}^2_\infty$-критические формации, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Так как $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}^2$, то в силу леммы 8 $|\mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2 : (\mathfrak{H}_1 \vee {}_\infty \mathfrak{H}_2) \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = |\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 2$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 2$, когда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form}(A \times B \times C)$, причем группы A, B и C удовлетворяют следующим условиям: A и B — неизоморфные группы вида $[P_1]([P_2]N)$, где P_1 — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа группы $[P_1]([P_2]N)$, P_2 — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа группы $[P_2]N$, $|N|$ — группа простого порядка, C — метанильпотентная группа.*

Для доказательства следствия 1 нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 20 [3, с. 94]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — минимальная тотально локальная не $\mathfrak{N}^m$-формация, когда $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$, где $G = [P_1]([P_2]\ldots([P_m]N)\ldots)$ — минимальная не $\mathfrak{N}^m$-группа, P_i — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $[P_i]([P_{i+1}]\ldots([P_m]N)\ldots)$ при всех $i = 1,\ldots,m$ и N — группа простого порядка.*

Лемма 21 [8]. *Пусть π — некоторое конечное множество простых чисел. Тогда для любого целого неотрицательного n любая тотально насыщенная подформация из $\mathfrak{N}^n_\pi$ однопорождена.*

Доказательство следствия 1. Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} G$ для некоторой группы G. По теореме 1 тогда и только тогда $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2|_\infty = 2$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_\infty \mathfrak{H}_2 \vee_\infty \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные $\mathfrak{N}^2_\infty$-критические формации, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$. В силу леммы 20 $\mathfrak{H}_i = l_\infty \mathrm{form} A_i$ $(i = 1, 2)$, где A_i группа вида $[P_1]([P_2]N)$, P_1 — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа группы $[P_1]([P_2]N)$, P_2 — самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа группы $[P_2]N$, $|N|$ — группа простого порядка. Понятно, что $A_1 \not\simeq A_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Пусть $n = l(G)$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^n_{\pi(G)}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то по лемме 21 $\mathfrak{M} = l_\infty \mathrm{form} C$ для некоторой метанильпотентной группы C. Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\infty \mathrm{form} A_1 \vee_\infty l_\infty \mathrm{form} A_2 \vee_\infty l_\infty \mathrm{form} C = l_\infty \mathrm{form}(A_1 \times A_2 \times C)$. Следствие доказано.

Abstract The paper presents the description of totally saturated formations of a metanilpotent defect 2.

Литература

1. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, Формации алгебраических систем, Москва, Наука, 1989.

3. А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. В. Г. Сафонов, О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3, Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины, №4(31) (2005), 157–162.

5. С. Ф. Каморников, О некоторых свойствах тотально локальных формаций, Матем. заметки, **60**, № 1 (1996), 24–29.

6. Н. Н. Воробъёв, Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во Гом. ун-та, Вып. 14 (1999), 132–140.

7. W. Guo, K. P. Shum, On totally local formations of groups, Comm. Algebra, **30**, № 5 (2002), 2117–2131.

8. В. Г. Сафонов, Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп, Алгебра и логика, **42**, № 6 (2003), 727–736.

9. В. Г. Сафонов, О тотально насыщенных формациях конечной длины, Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины, № 6(27) (2004), 150–155.

10. В. Г. Сафонов, О двух задачах теории тотально насыщенных формаций, Докл. НАН Беларуси, **49**, № 5 (2005), 16–20.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 10.05.06