Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(37), 2006

УДК 519.2

Сети массового обслуживания с сигналами и ограниченным временем ожидания в очередях

О. В. Якубович

В аналитических исследованиях сетей массового обслуживания центральным является вопрос возможности представления стационарного распределения в форме произведения множителей, характеризующих отдельные узлы, поскольку в настоящее время это остается единственной возможностью точного нахождения стационарного распределния сети массового обслуживания. При решении вопроса о мультипликативности стационарного распределения сетей важнейшее место занимает свойство квазиобратимости узлов, из которых состоит сеть. В настоящее время используются разнообразные модификации квазиобратимости, понятие квазиобратимости постоянно совершенствуется, позволяя исследовать новые модели сетей. В ранних исследованиях понятие квазиобратимости применялось только к "заявко-сохраняющим"системам, то есть таким. что в них в равновесии сохранялось среднее число заявок, поступающих в систему, и заявок, выходящих из нее. Определение квазиобратимости цепи Маркова впервые было представлено Ф.П. Келли [1], затем расширено в работе [2] и модифицировано в [3]. Келли был доказан тот факт, что сеть, склеенная из квазиобратимых узлов, имеет стационарное распределение в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы.

Нетрадиционный подход, применяемый к исследованию марковских цепей с непрерывным временем, позволяющий переходы из состояния в это же самое состояние, дал возможность перенести понятие квазиобратимости и на случай "заявко-несохраняющих"систем

В настоящей работе использован метод разложения интенсивности перехода на составляющие, который представлен в [3]. Данный метод основан на том, что интенсивность $q(x, y)$ перехода из некоторого состояния x цепи Маркова с непрерывным временем, имеющей счетное пространство состояний X и счетное множество T типов заявок (или типов переходов), в некоторое состояние y этой же цепи разбивается на следующие слагаемые:

$$q(x,\ y) = q^I(x,\ y) + \sum_{t\in T}\left[q^A(t,\ x,\ y) + q^D(t,\ x,\ y) + \sum_{s\in T} q^{AD}(s,\ t,\ x,\ y)\right], \qquad (1)$$

где $t,\ s \in T$ — типы заявок, $q^A(t,\ x,\ y)$ и $q^D(t,\ x,\ y)$ — интенсивности перехода из состояния x в состояние y за счет поступления и ухода заявки типа t соответственно, $q^{AD}(s,\ t,\ x,\ y)$ — интенсивность перехода из состояния x в состояние y за счет поступления заявки типа s, которое одновременно является уходом заявки типа t (разрешение подобных переходов, так называемых AD — событий, и расширило первоначальное определение квазиобратимости), $q^I(x,\ y)$ — интенсивность внутреннего перехода из состояния x в состояние y, $x \neq y$. Если $x = y$, будем считать, что происходят переходы из состояния $x \in X$ в это же состояние. Используя введенное разбиение интенсивностей переходов, для всех $x \in X$ и $t \in T$ определяют

$$\alpha(t,x) = \sum_{y\in S}\left[q^{A}(t,x,y) + \sum_{s\in T} q^{AD}(t,s,x,y)\right] \tag{2}$$

и

$$\beta(t,x) = \sum_{y\in S}\frac{p(y)}{p(x)}\left[q^{D}(t,y,x) + \sum_{s\in T} q^{AD}(s,t,y,x)\right], \tag{3}$$

где $\{p(x),\ x\in X\}$ — стационарное распределение рассматриваемой цепи. Выражения в правых частях (5) и (6) есть интенсивности поступлений типа t в прямом и обращенном времени соответственно.

Цепь квазиобратима, если для всех $t\in T$ $\alpha(t,\ x)$ и $\beta(t,\ x)$ не зависят от x (в этом случае пишут $\alpha(t)$ и $\beta(t)$). Такую цепь называют также квазиобратимым узлом.

Рассмотрим сеть, склеенную из N квазиобратимых узлов. Пусть $\alpha_i(t)$ есть интенсивность суммарного потока заявок типа t, направленного в i-ый узел в стационарной сети, а $\beta_i(t)$ — интенсивность суммарного потока заявок типа t в i-ый узел в обращенном времени, $\nu_i(t)$ — интенсивность суммарного потока заявок типа t в i-ый узел извне. Пусть заявка типа s независимо от других заявок и их типов с вероятностью $p(0;\ i,\ s)$ поступает в i-ый узел, $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{s=1}^{M} p(0;\ i,\ s) = 1$. Заявка типа t, завершающая обслуживание в i-ом узле, мгновенно переходит в j-ый узел, меняя свой тип t на тип s, с вероятностью $p(i,\ t;\ j,\ s)$ или с вероятностью $p(i,\ t;\ 0)$ покидает сеть, при этом $p(i,\ t;\ 0) + \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{s=1}^{M} p(i,\ t;\ j,\ s) = 1$, $i=\overline{1,\ N}$, $t=\overline{1,\ M}$.

При таких предположениях справедлива следующая теорема, которую будем называть *обобщенной теоремой Келли*[3,4].

Теорема. *Если для всех $1\le i\le N$ и $t\in T$, $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ удовлетворяют*

$$\alpha_i(t) = \nu_i(t) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s\in T}\beta_j(s)p(j,s;i,t)\ , \tag{4}$$

тогда стационарное распределение для сети квазиобратимых узлов есть

$$p(x) = \prod_{i=1}^{N} p_i(x_i)\,, \tag{5}$$

где $p_i(x_i)$ — стационарное распределение i-го узла.

Изолированный узел.

Рассмотрим систему M/M/1, в которую поступает три независимых пуассоновских потока заявок: заявки типа p — обычные положительные заявки, увеличивающие длину очереди на единицу, поступают с интенсивностью $\alpha(p)$; заявки типа s^- — отрицательные сигналы, уменьшающие длину очереди на единицу, если система не пуста, и не изменяющие состояние системы, если она пустая, с интенсивностью $\alpha(s^-)$; заявки типа — сигналы, увеличивающие длину очереди на единицу и покидающие систему как заявки типа s^+ , с интенсивностью $\alpha(s^+)$. Таким образом, $T = p, s^+, s^-$ — множество типов поступающих заявок. Длительности обслуживания в узлах независимы, не зависят от процесса поступления заявок и имеют показательное распределение с параметром μ. Время ожидания заявок, стоящих в очереди, ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение с параметром ν. Заявки, покидающие систему после обслуживания или окончания времени ожидания, выходят из системы как заявки типа p. Поведение системы описывается цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Стационарное распределение системы определяется равенством

$$p(n) = (1-\rho)\rho^n, \tag{6}$$

где

$$\rho = \frac{\alpha(p) + \alpha(s^+)}{\mu + \alpha(s^-) + \nu}.$$

Условие эргодичности принимает следующий вид: $\rho < 1$.

Предположим, что пустой узел генерирует уход заявок типа s^+ с интенсивностью $q(0,0) = \rho^{-1}\alpha(s^+)$. Это дополнительное предположение необходимо для доказательства квазиобратимости в широком смысле. Для доказательства квазиобратимости необходимо разбить интенсивность перехода $q(t, x, y,\, t \in T,\, x, y \in X)$ на составляющие следующим образом:

$q^A(p, n, n+1) = \alpha(p)$, $n \in X$;

$q^A(s^-, s^-, n, n-1) = \alpha(s^-)$, $n \in X \backslash \{0\}$;

$q^A(s^-, s^-, 0, 0) = \alpha(s^-)$;

$q^{AD}(s^+, s^+, n, n+1) = \alpha(s^+)$, $n \in X$;

$q^D(s^+, 0, 0) = \rho^{-1}\alpha(s^+)$;

$q^D(p, n, n-1) = \mu + \nu$, $n \in X \backslash \{0\}$;

$q(t, x, y) = 0$ во всех остальных случаях.

Проверяя равенства (2) и (3) для нашей системы, получим

$\alpha(p, x) = \alpha(p)$, $x \in X$;

$\alpha(s^-, x) = \alpha(s^-)$, $x \in X$;

$\alpha(s^+, x) = \alpha(s^+)$, $x \in X$;

$\beta(p, x) = \rho(\mu + \nu)$, $x \in X$;

$\beta(s+, x) = \rho^{-1}\alpha(s^+)$, $x \in X$;

$\beta(s-, x) = 0$, $x \in X$.

Так как $\alpha(t, x) = \alpha(t)$, $\beta(t, x) = \beta(t)$ для всех $t \in X$, можно утверждать, что рассматриваемая система квазиобратима

Открытая сеть.

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N, узлов со структурой, описанной выше. Состояние сети характеризуется марковским процессом $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$. В сеть поступает три независимых пуассоновских потока потока заявок типа t, $t \in T$: положительные заявки типа p, сигналы типа s^+ и сигналы типа s^-. $\alpha_i\,(t)$ — интенсивность суммарного потока заявок типа t, направленного в i-ый узел, а $\beta_i\,(t)$ — интенсивность суммарного потока заявок типа t в i-ый узел в обращенном времени, $\nu_i\,(t)$ — интенсивность суммарного потока заявок типа t в i-ый узел извне $i = \overline{1, N}$, $t \in T$. Заявка типа s независимо от других заявок и их типов с вероятностью $p\,(0;\ i,\ s)$ поступает в i-ый узел, $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{s=1}^{M} p\,(0;\ i,\ s) = 1$. Заявка типа p (положительная), завершающая обслуживание в i-ом узле, мгновенно переходит в j-ый узел, меняя свой тип p на тип s, с вероятностью $p\,(i,\ t;\ j,\ s)$ или с вероятностью $p\,(i,\ t;\ 0)$ покидает сеть, при этом $p(i,\ t;\ 0)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{M} p(i,\ t;\ j,\ s)=1, i=\overline{1,\ N}, t\in T$. Длительности обслуживания в узлах независимы, не зависят от процесса поступления заявок и имеют показательное распределение с параметром μ_i в i-ом узле. Время ожидания заявок, стоящих в очереди i-го узла, ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение с параметром ν_i $(i=\overline{1,\ N})$.

Стационарное распределение i-го узла сети определяется согласно (6)

$$p_i(n_i)=(1-\rho_i)\rho_i^n, \tag{7}$$

где

$$\rho_i=\frac{\alpha_i(p)+\alpha_i(s^+)}{\mu_i+\alpha_i(s^-)+\nu_i},\ i=\overline{1,\ N}.$$

Применяя обобщенную теорему Келли [3, 4], получим следующий результат о возможности представления стационарного распределения в форме произведения множителей, характеризующих отдельные узлы сети.

Теорема. *Если узлы открытой сети квазиобратимы и выполняется условие (4), то стационарное распределение представимо в виде*

$$p(n)=p_1(n_1)\dots p_N(n_N),$$

где $p(n_i)$ — стационарная вероятность состояния n_i изолируемого узла, определяемая равенством (7).

Abstract. This paper considers an open queueing network with signals of two types and positive customers. Positive customers have limited waiting time. Quasireversibility of isolated node is installed. In this case stationary distribution of the states has product form.

Литература

1. W. Henderson, C. E. M. Pearce, P. K. Pollett, P. G. Taylor, Conneting internally-balanced quasi-reversible Markov processes, Adv. Appl. Prob., **24** (1992), 934–959.

2. Ю. В. Малинковский, Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками, Проблемы передачи информации, **35**, Вып. 1 (1999), 96–110.

3. X. Chao, M. A. Miyazawa, A probabilistic decomposition approach to quasi-reversibility and its applications in coupling of queues, Preprint. New Jersey Inst. of Technology, Scince University of Tokyo, 1996.

4. P. G. Taylor, Quasi-reversibility and networks of queues with non-standart batch movements, Oper. Res., №2 (1997), 602–610.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.05.06