Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(37), 2006

УДК 512.542

О конечных группах с p-нильпотентными нормализаторами силовских подгрупп

А. А. Родионов

В работе рассматриваются только конечные группы.

Целью данной работы является ослабление условий, накладываемых на нормализаторы силовских подгрупп в теореме, доказанной А. Баллестером-Болинше и Л. А. Шеметковым в статье [1]. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть в группе G для любого простого числа $p \geqslant 5$ нормализатор силовской p-подгруппы из G p-нильпотентен. Тогда G разрешима и имеет нильпотентную холлову $\{2,3\}'$-подгруппу.*

В работе [2] доказано, что группа нильпотентна, если нормализаторы силовских p-подгрупп нильпотентны для любого простого числа p. Усилением этого результата является следующая теорема.

Теорема 2 (см. [1]). *Группа G нильпотентна, если для каждого $p \in \pi(G)$ нормализатор силовской p-подгруппы из G p-нильпотентен.*

Для доказательства теоремы 1, которая обобщает теорему 2, нам потребуются некоторые известные результаты. Пусть m — натуральное число. Через $\pi(m)$ обозначим множество всех различных простых делителей числа m. Вместо $\pi(|G|)$ будем писать $\pi(G)$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Подгруппа H группы G называется π-подгруппой, если $|H|$ является π-числом, то есть $\pi(H) \subseteq \pi$. Подгруппа H называется холловой π-подгруппой, если $|H|$ — π-число, а $|G : H|$ — π'-число. Через G_π будем обозначать одну из холловых π-подгрупп группы G.

Аналогом теоремы Силова в разрешимых группах является теорема Ф.Холла о холловых подгруппах.

Теорема 3 (Ф. Холл.) *Пусть G — разрешимая группа и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:* 1) *холловы π-подгруппы в G существуют;* 2) *любые две холловы π-подгруппы G сопряжены между собой;* 3) *всякая π-подгруппа из G содержится в некоторой холловой π-подгруппе группы G.*

Доказательство следующей леммы использует классификацию конечных простых групп.

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть p — наибольшее простое число, делящее порядок неабелевой простой группы N. Тогда p не делит $|Out(N)|$.*

Теорема 4 (Томпсон, см. [5]). *Пусть $p \geqslant 5$ — простое число и P — силовская p-подгруппа группы G. Если $N_G(P)/C_G(P)$ есть p-группа, то $O^p(G)$ есть собственная подгруппа группы G.*

Напомним, что $O^p(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа в G, факторгруппа по которой является p-группой.

Теорема 5 (см. [3]).*Пусть L — простая группа и $|\pi(L)| = 3$. Тогда $|L| = 2^\alpha 3^\beta p$, $p > 3$ и силовская p-подгруппа группы L самоцентрализуема.*

Приступим к доказательству основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Предположим, что заключение теоремы неверно. Пусть G — контрпример наименьшего порядка. В этом случае порядок G делится по крайней мере на одно простое число, которое больше 3.

Если G простая, то она неабелева. Пусть $p \in \pi(G)$, $p \geqslant 5$, тогда по теореме 4 из p-нильпотентности нормализатора силовской p-подгруппы следует, что $O^p(G)$ — собственная подгруппа группы G, что противоречит простоте G.

Таким образом, G не простая. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $N_G(P)L/L = N_{G/L}(PL/L)$ для любой силовской подгруппы P, то условия теоремы выполняются для G/L. Ввиду выбора G отюда следует, что G/L разрешима. А так как G неразрешима, то L неразрешима. Более того, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, и она неабелева.

Докажем, что $\pi(L) = \pi(G)$. Предположим противное. Пусть $\pi = \pi(L) \neq \pi(G)$. В силу разрешимости, в G/L существует холлова π-подгруппа K/L. Для K выполнены условия теоремы и $|K| < |G|$. По индукции K разрешима. Кроме того, $L \subseteq K$, что противоречит неразрешимости L.

Докажем теперь, что в G существуют силовская 2-подгруппа и силовская 3-подгруппа, входящие в L. Предположим противное. Пусть $\pi = \pi(G)\backslash\{2,3\}$. В силу разрешимости, в G/L существует разрешимая холлова π-подгруппа K/L. Для K выполнено условие теоремы, и она собственная в G. По индукции K разрешима, что противоречит неразрешимости L.

Так как L неабелева, то $L = L_1 \times \ldots \times L_t$, где все L_i — простые неабелевы группы. А так как $\pi(G/L) \subseteq \pi(G)\backslash\{2,3\}$, то для G/L условие p-нильпотентности выполняется для всех простых чисел из $\pi(G/L)$. Поэтому все силовские подгруппы в G/L нормальны, то есть G/L нильпотентна.

Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Предположим, что порядок G/L делится по крайней мере на два различных простых числа p, q. Из нильпотентности G/L следует, что силовская p-подгруппа G_pL/L нормальна в G/L, а значит G_pL нормальна в G.

Применяем лемму Фраттини к G_pL:

$$G = N_G(G_p)G_pL = N_G(G_p)L.$$

Пусть $L_p \subseteq G_p$ и $L_p = P_1 \times \ldots \times P_t$, где P_i — силовская p-подгруппа из L_i. Рассмотрим G_q — силовскую q-подгруппу группы G. Получаем $G_q = QL_q$, где Q — силовская q-подгруппа из $N_G(G_p)$. Из p-нильпотентности $N_G(G_p)$ получаем $QG_p = Q \times G_p$, то есть L_p нормальна в QG_p, и следовательно, все P_i нормальны в QG_p для любого i. Таким образом, для любого $x \in Q$ имеем $P_i^x = P_i$, поэтому $P_i \subseteq L_i \cap L_i^x$, а это возможно лишь в случае когда $L_i = L_i^x$. Следовательно, $N_G(L_i) \supseteq QL \supseteq QL_q = G_q$. В силу произвольности выбора q получаем, что $N_G(L_i) \supseteq G_q$ для любого $q \in \pi(G)\backslash\{2,3\}$. Также имеем $N_G(L_i) \supseteq G_2$ и $N_G(L_i) \supseteq G_3$, так как $G_2, G_3 \subseteq L$. Итак, $N_G(L_i) = L$. Поэтому $t = 1$ и L — простая неабелева группа.

Теперь пусть r — наибольшее простое число, делящее $|L|$. По лемме 1, r не делит $|G/L|$, так как G/L изоморфна подгруппе $Out(G)$. Значит, существует силовская r-подгрупа R в G такая, что $R \subseteq L$, и из r-нильпотентности $N_G(R)$ следует r-нильпотентность $N_L(R)$. Так как $N_L(R)/C_L(R)$ — r-группа, то по теореме 4 $O^r(L)$ — собственная подгруппа в L. Противоречие с минимальностью L.

Случай 2. Пусть G/L — p-группа для некоторого простого p. Ввиду условия и теоремы 4, в этом случае $|\pi(L)| = 3$ и $p \geq 5$. Пусть $|G : L| = p^\beta$. Положим $|G| = p^\alpha m$, $|L| = p^\epsilon m_1$, $(p, m) = (p, m_1) = 1$.

Ясно, что $G = LG_p$. По условию $N_G(G_p)$ p-нильпотентен, поэтому $N_G(G_p) = H \times \times G_p$ и $H \subseteq L$. Пусть $L_p = L \cap G_p$, $(L_i)_p = G_p \cap L_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Предположим, что $H \neq 1$. Если $t = 1$, то H содержится в централизаторе силовской p-подгруппы простой группы L, что противоречит теореме 5. Значит, $t > 1$. Тогда в H существует неединичный элемент $h = l_1 l_2 \ldots l_t$, где l_i — p'-элемент из L_i и $[l_i, l_j] = 1$ при $i \neq j$. Можно считать, что $l_1 \neq 1$. Ясно, что $L_p = (L_1)_p \times \ldots \times (L_t)_p$. Так как $[h, L_p] = 1$, то $[h, (L_1)_p] = 1$. Имеем $h = l_1(l_2 \ldots l_t) = l_1 \bar{l}$, где $[\bar{l}, (L_1)_p] = 1$. Теперь пусть $x \in (L_1)_p$, тогда

$$1 = [h, x] = [l_1 \bar{l}, x] = [l_1, x]^{\bar{l}} [\bar{l}, x] = [l_1, x]^{\bar{l}} \Longrightarrow [l_1, x] = 1.$$

Отсюда следует, что $[l_1, (L_1)_p] = 1$ и $l_1 \in C_{L_1}((L_1)_p)$, что противоречит строению простой группы L_1 (теорема 5).

Итак, доказано, что $H = 1$, т. е. $N_G(G_p) = G_p$.

Подгруппа L_1^G нормальна в G и содержится в L, отсюда $L = L_1^G = L_1 \times L_1^{g_2} \times \times \ldots \times L_1^{g_t}$ для некоторых $g_2, \ldots, g_t \in G$. Так как $G = LG_p = (L_1 \times \ldots \times L_t)G_p$, то $|G : N_G(L_1)| = p^\gamma = t$. По теореме Силова,

$$|G : N_G(G_p)| = |G : G_p| = m = m_1^t = m_1^{p^\gamma}$$

и $m_1^{p^\gamma} \equiv 1(mod p)$. Но по теореме Эйлера о вычетах получаем $m_1^{p-1} \equiv 1(mod p)$. Пусть $m_1^d \equiv 1(mod p)$ и d — наименьшее натуральное число с данным свойством. Поскольку в кольце классов вычетов группа по умножению циклическая, то $d|p-1$ и $d|p^\gamma$, что возможно только при $\gamma = 0$. Тогда $t = 1$, и значит, L — простая неабелева группа.

Итак, доказано, что L — неабелева простая группа. Теперь пусть r — наибольший простой делитель $|L|$. Очевидно, $r \geq 5$. По лемме 1, r не делит $|G/L|$, так как G/L изоморфна подгруппе $Out(G)$. Значит, $r \neq p$. По теореме 5, $\pi(L) = \{2, 3, r\}$. Но это противоречит тому, что $\pi(L) = \pi(G)$ и $p \in \pi(G)$. Теорема доказана.

Abstract. It is proved that a finite group is soluble if normalizers of its Sylow p-subgroups are p-nilpotent for every $p \geqslant 5$.

Литература

1. А. Баллестер-Болинше, Л. А. Шеметков. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах. Сиб. мат. журнал, 1540 (1999), 3–5.

2. M. Bianchi, B. Gillio, P. Hauck. On finite groups with nilpotent Sylow-normalizers. Arch Math., 47 (1986), 193–196.

3. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Atlas of finite groups. Oxford University Press, Eynsham, 1985.

4. K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

5. B. Huppert. Endliche Gruppen I. Berlin; New York: Springer-Verl., 1967.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 14.03.06