Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Холловы конгруэнции n-арных групп

А.М.Гальмак

1. Введение

В определении некоторых групповых понятий присутствуют инвариантные подгруппы того или иного порядка. Например, конечные нильпотентные группы можно определить как конечные группы, в которых все силовские подгруппы инвариантны. Среди различных n-арных обобщений нильпотентности самым широким является полунильпотентность. Полунильпотентными будут все циклические n-арные группы, и, в частности, найденные Постом [1, 2] циклические n-арные группы в которых нет собственных, в том числе и одноэлементных n-арных подгрупп. Поэтому конечные полунильпотентные n-арные группы нельзя определить как конечные n-арные группы, в которых все силовские n-арные подгруппы инвариантны (полуинвариантны). Однако, ситуация меняется к лучшему, если вместо инвариантных (полуинвариантных) n-арных подгрупп рассматривать конгруэнции n-арных групп. Поэтому изучение конгруэнций фиксированных порядков полиадических групп, в том числе π-холловых конгруэнций, является актуальным направлением теории n-арных групп.

Приведём пример циклической n-арной группы, не имеющей собственных n-арных подгрупп, но обладающей нетривиальными конгруэнциями.

Пример 1.1. Определим на циклической группе $Z_6 = <a>$ 7-арную операцию

$$[a_1 \ldots a_7] = a_1 \ldots a_7 a.$$

Так как

$$[\underbrace{a^k \ldots a^k}_{7}] = a^{k+1},\ k = 0, 1, \ldots,\ 5,$$

то в 7-арной группе $< Z_6,\ [\ ] >$ нет собственных 7-арных подгрупп, в том числе и первого порядка.

Инвариантная подгруппа Z_3 группы Z_6 определяет на Z_6 конгруэнцию ρ, классы которой имеют вид

$$\rho(e) = Z_3 = \{e, a^2, a^4\}, \qquad \rho(a) = aZ_3 = \{a, a^3, a^5\}.$$

Если $(a_i, b_i) \in \rho$, i = 1, … ,7, то

$$(a_1 \ldots a_7 a,\ b_1 \ldots b_7 a) \in \rho,$$

откуда

$$([a_1 \ldots a_7],\ [b_1 \ldots b_7]) \in \rho.$$

Следовательно, ρ — конгруэнция 7-арной группы $< Z_6,\ [\,] >$.

Аналогично показывается, что инвариантная подгруппа Z_2 группы Z_6 определяет на 7-арной группе $< Z_6,\ [\,] >$ конгруэнцию σ, классы которой имеют вид

$$\sigma(e) = Z_2 = \{e, a^3\}, \quad \sigma(a) = aZ_2 = \{a,\ a^4\}, \quad \sigma(a^2) = a^2 Z_2 = \{a^2,\ a^5\}.$$

Можно показать, что других нетривиальных конгруэнций 7-арная группа $< Z_6, [\ ] >$ не имеет. Мы убедимся в этом ниже, обобщив пример 1.1 (теорема 3.2).

Следующее определение является естественным в силу того, что все классы конгруэнции, определённой на n-арной группе, имеют одну и ту же мощность (предложение 10.11 [3]).

Определение 1.2 ([4]). Порядком конгруэнции, определённой на n-арной группе, называется мощность классов этой конгруэнции.

Если ρ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\ ] >$, то для обозначения её порядка в n-арной группе используют [4] символ $\|\rho\|$. При этом, если $\|\rho\| < \infty$, то ρ называют конечной конгруэнцией. В противном случае ρ — бесконечная конгруэнция.

Порядок конгруэнции ρ в n-арной группе $< A, [\ ] >$ не следует путать с её порядком $|\rho|$ как подалгебры в A^2. Допуская вольность речи, в случаях, когда не возникает разночтений, говорят и пишут "порядок конгруэнции"вместо "порядок конгруэнции в n-арной группе".

Определение 1.3 ([4]). Конгруэнция ρ конечной n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется π-холловой, если её порядок $\|\rho\|$ является наибольшим π-делителем порядка $< A, [\ ] >$, т. е. равен $|A|_\pi$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то π-холлова конгруэнция называется p-силовской.

Например, конгруэнции ρ и σ из приведенного выше примера являются 3-силовской и 2-силовской соответственно.

Нам понадобится теорема Глускина-Хоссу [5], утверждающая, что на всякой n-арной группе $< A, [\ ] >$ можно определить бинарную операцию $\circ$ и отображение β, а также выбрать элемент $d \in A$ так, что $< A, \circ >$ — группа, β — ее автоморфизм, и выполняются следующие условия:

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = x_1 \circ x_2^\beta \circ \ldots \circ x_n^{\beta^{n-1}} \circ d, \quad x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n \in A; \tag{1}$$

$$d^\beta = d; \tag{2}$$

$$d \circ x = x^{\beta^{n-1}} \circ d,\ x \in A. \tag{3}$$

Верно и обратное утверждение (обратная теорема Глускина-Хоссу): если элемент d группы $< A, \circ >$ и ее автоморфизм β удовлетворяют условиям (2) и (3), то $< A, [\ ] >$ — n-арная группа с n-арной операцией (1).

2. Связь между конгруэнциями групп и конгруэнциями n-арных групп

Для всякого элемента а n-арной группы $< A, [\ ] >$ определим на A бинарную операцию $x \, a \, y = [x\alpha y]$, где α — обратная последовательность для элемента а [3, 5]. Легко проверяется (см., например, предложение 7.2 [5]), что $< A, a >$ — группа с единицей а.

Лемма 2.1 ([6]). *Если ρ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\ ] >$, то для любого $a \in A$ ρ является конгруэнцией группы $< A, a >$, при этом $< \rho(a), a >$ — инвариантная подгруппа группы $< A, a >$, удовлетворяющая условию $[a\rho(a)\alpha] = \rho(a)$, где α — обратная последовательность для a.*

Лемма 2.2 ([6]). *Пусть $< A, [\,] >$ — n-арная группа, $a \in A$, $\rho_{B,a}$ — конгруэнция группы $< A, (a) >$, определяемая её инвариантной подгруппой $< B, (a) >$, удовлетворяющей условию $[aB\alpha] = B$, где α — обратная последовательность для* a. *Тогда $\rho_{B.a}$ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\,] >$.*

Лемма 2.3. *Пусть $< A, \circ >$ — группа, $< A, [\,] >=< A, [\,]_{\circ,\beta,d} >$ — n-арная группа, определяемая обратной теоремой Глускина-Хоссу, $\rho_{B,\circ}$ — конгруэнция группы $< A, \circ >$, определяемая её инвариантной подгруппой $< B, \circ >$, удовлетворяющей условию $B^\beta = B$. Тогда $\rho_{B,\circ}$ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\,] >$.*

Доказательство. Пусть $(a_i, b_i) \in \rho_{B,\circ}$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $(a_i, b_i) \in \rho_{B,\circ}$, тогда и только тогда, когда $a_i \circ B = b_i \circ B$, то из условия $B = B^\beta$ и того, что β — автоморфизм группы $< A, \circ >$, последовательно получим

$$(a_i \circ B)^\beta = (b_i \circ B)^\beta, \qquad a_i^\beta \circ B^\beta = b_i^\beta \circ B^\beta, \qquad a_i^\beta \circ B = b_i^\beta \circ B,$$

откуда $(a_i^\beta, b_i^\beta) \in \rho_{B,\circ}$. Верно и более общее утверждение

$$(a_i^{\beta^k}, b_i^{\beta^k}) \in \rho_{B,\circ}, \quad k \geq 1, \tag{*}$$

так как β^k — автоморфизм группы $< A, \circ >$ и выполняется условие $B^{\beta^k} = B$.

Из (*) и того, что $\rho_{B,\circ}$ — конгруэнция группы $< A, \circ >$ следует

$$(a_1 \circ a_2^\beta \circ \ldots a_n^{\beta^{n-1}} \circ d, \qquad b_1 \circ b_2^\beta \circ \ldots b_n^{\beta^{n-1}} \circ d) \in \rho_{B,\circ},$$

откуда, согласно обратной теореме Глускина-Хоссу, получаем

$$([a_1 a_2 \ldots a_n], [b_1 b_2 \ldots b_n]) \in \rho_{B,\circ}.$$

Следовательно, $\rho_{B,\circ}$ — конгруэнция на $< A, [\,] >$. Лемма доказана.

Теорема 2.4. *Определим на группе $< A, \circ >$, обладающей инвариантной подгруппой $< B, \circ >$, n-арную операцию*

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n \circ d,$$

где $d \in Z(A)$, и обозначим через $\rho_{B.\circ}$ конгруэнцию группы $< A, \circ >$, определяемую $< B, \circ >$. Тогда:

1) *$\rho_{B,\circ}$ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\,] >$;*

2) *если $d \in B \cap Z(A)$, то $\rho_{B,\circ}$ совпадает с конгруэнцией на $< A, [\,] >$, определяемой её инвариантной n-арной подгруппой $< B, [\,] >$.*

Доказательство. 1) Следует из леммы 2.3, когда β — тождественный автоморфизм.

2) Так как $d \in B \cap Z(A)$, то $< B, [\,] >$ — n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$. А так как

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = x \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-1} \circ d = \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{i-1} \circ x \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-i} \circ d =$$

$$= [\underbrace{B \ldots B}_{i-1} x \underbrace{B \ldots B}_{n-i}], \; x \in A, \; i = 2, 3, \ldots, n,$$

то $< B, [\,] >$ — инвариантна в $< A, [\,] >$.

Если $(a,b) \in \rho_{B,\circ}$, то $a \circ B = b \circ B$, откуда

$$a \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-1} \circ d = b \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-1} \circ d,$$

$$[a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [b \underbrace{B \ldots B}_{n-1}].$$

Следовательно, согласно предложению 7.4 [3], $(a,b) \in \rho_B$, где ρ_B — конгруэнция n-арной группы $< A, [\ ] >$, определяемая $< B, [\ ] >$. Таким образом, $\rho_{B,\circ} \subseteq \rho_B$.

Обратно, если $(a,b) \in \rho_B$, то, согласно предложению 7.4 [3],

$$[a \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [b \underbrace{B \ldots B}_{n-1}],$$

$$a \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-1} \circ d = b \circ \underbrace{B \circ \ldots \circ B}_{n-1} \circ d.$$

Из последнего равенства, учитывая $d \in B$, получаем $a \circ B = b \circ B$, откуда $(a,b) \in \rho_{B,\circ}$. Следовательно, $\rho_B \subseteq \rho_{B,\circ}$, и верно равенство $\rho_{B,\circ} = \rho_B$. Теорема доказана.

Так как в абелевой группе все подгруппы инвариантны и она совпадает со своим центром, то из теоремы 2.4 вытекает

Следствие 2.5. *Определим на абелевой группе $< A, \circ >$ n-арную операцию*

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n \circ d, \ d \in A.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $< B, \circ >$ — подгруппа в $< A, \circ >$, то конгруэнция $\rho_{B,\circ}$, определяемая ею, является конгруэнцией n-арной группы $< A, [\ ] >$;

2) если d — элемент подгруппы $< B, \circ >$, то $\rho_{B,\circ}$ совпадает с конгруэнцией на $< A, [\ ] >$, определяемой её инвариантной n-арной подгруппой $< B, [\ ] >$.

Следствие 2.6. *Если $< A, [\ ] >$ — n-арная группа, производная от группы $< A, \circ >$, то отношение ρ, определённое на A, является конгруэнцией на $< A, [\ ] >$ тогда и только тогда, когда ρ — конгруэнция на $< A, \circ >$.*

Доказательство. Необходимость. Если ρ — конгруэнция на $< A, [\ ] >$, то по лемме 2.3, ρ — конгруэнция группы $< A, a[e] >$, где e — единица группы $< A, \circ >$, а так как, согласно предложению 2.2.13 [7], операции $a[e]$ и $\circ$ совпадают, то ρ — конгруэнция группы $< A, \circ >$.

Достаточность. Если ρ — конгруэнция группы $< A, \circ >$, то $< \rho(e), \circ >$ — инвариантная подгруппа группы $< A, \circ >$. Полагая в теореме 2.4 $d = e$, получаем, что ρ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\ ] >$. Следствие доказано.

3. Существование конгруэнций фиксированных порядков

Предложение 3.1. *Определим на конечной абелевой группе $< A, \circ >$ операцию*

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n \circ d, d \in A.$$

Тогда n-арная группа $< A, [\ ] >$ для любого делителя m своего порядка $|A|$ обладает конгруэнцией порядка m.

Доказательство. Для любого m, деляшего $|A|$, абелева группа A имеет подгруппу B порядка m. Тогда ввиду 1) следствия 2.5, конгруэнция ρ_B группы $< A, \circ >$ является конгруэнцией n-арной группы $< A,\ [\ ] >$. А так мощность классов эквивалентности отношения ρ_B совпадает с порядком m подгруппы B, то ρ_B — конгруэнция n-арной группы $< A,\ [\ ] >$, имеющая порядок m. Предложение доказано.

Теорема 3.2. *Определим на циклической группе $A =< a >$ n-арную операцию*

$$[b_1 \dots b_n] = b_1 \circ \dots \circ b_n \circ a.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $< A,\ [\ ] >$ *— циклическая n-арная группа, порождённая единицей e группы A;*

2) *если A — конечная, то для любого делителя d порядка $|\mathrm{A}|$ n-арная группа $< A,\ [\ ] >$ обладает единственной конгруэнцией ρ_d порядка d;*

3) *если $|\mathrm{A}| = n-1$, то в $< A,\ [\ ] >$ нет n-арных подгрупп, отличных от $< A,\ [\ ] >$.*

Доказательство. 1) и 3) доказаны в [7].

2) Существование конгруэнции ρ_d порядка d в n-арной группе $< A,\ [\ ] >$ следует из предложения 3.1.

Предположим, что σ еще одна конгруэнции порядка d в n-арной группе $< A,\ [\ ] >$. Тогда по предложению 2.2.13 [7], операция $\circ$ совпадает с операцией $a[e]$, где e — единица группы $< A, \circ >$, а по лемме 2.1, ρ_d и σ — конгруэнции группы $< A, a[e] > =< < A, \circ >$, причем $< \rho_d(e), \circ >$ и $< \sigma(e), \circ >$ — подгруппы группы $< A, \circ >$. Ясно, что обе они имеют порядок d. А так как в конечной циклической группе не может быть более одной подгруппы одного и того же порядка, то $\rho_d(e) = \sigma(e)$, откуда $\rho_d = \sigma$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть $< A,\ [\ ] >$ — конечная n-арная группа, π — множество простых чисел. Тогда:*

1) $< A,\ [\ ] >$ *не может иметь более одной π-холловой конгруэнции;*

2) *если $< A,\ [\ ] >$ обладает полуинвариантными π-холловыми n-арными подгруппами, то все они определяют одну и ту же единственную π-холлову конгруэнцию.*

Доказательство. 1) Если ρ и σ — π-холловы когруэнции конечной n-арной группы $< A,\ [\ ] >$, то по лемме 2.1, для любого $a \in A$ ρ и σ — когруэнции группы $< A, a >$, а $< \rho(a), a >$ и $< \sigma(a), a >$ — инвариантные подгруппы группы $< A, a >$. Ясно, что обе указанные инвариантные подгруппы являются π-холловыми. А так как в конечной группе не может быть более одной инвариантной π-холловой подгруппы, то $\rho(a) = \sigma(a)$, откуда $\rho = \sigma$.

2) Если $< B,\ [\ ] >$ и $< C,\ [\ ] >$ — полуинвариантные π-холловы n-арные подгруппы n-арной группы $< A,\ [\ ] >$, то определяемые ими конгруэнции ρ_B и ρ_C являются π-холловыми и, согласно 1), $\rho_B = \rho_C$. Теорема доказана.

Следствие 3.4. *Конечная n-арная группа не может иметь более одной ρ- силовской конгруэнции. Все полувариантные ρ-силовские n-арные подгруппы n-арной группы определяют на ней одну и ту же единственную ρ-силовскую конгруэнцию.*

Замечание 3.5. *В [4] утверждение 1) теоремы 3.3 было доказано для n-арной группы $< A,\ [\ ] >$, соответствующая группа Поста A_0 который обладает свойством C_π.*

Лемма 3.6. *Пусть $< A,\ [\ ] >$ — конечная n-арная группа, $a \in A$, $< B, a > >$ — подгруппа порядка d группы $< A, a >$, удовлетворяющая условию $[aB\alpha] = B$, где α — обратная последовательность для а, $\rho_{B,a}$ — конгруэнция группы $< A, a >$, определяемая $< B, a >$. Тогда $\rho_{B,a}$ — конгруэнция n-арной группы $< A,\ [\ ] >$.*

Доказательство. По лемме 2.2, $\rho_{B,a}$ — конгруэнция n-арной группы $< A, [\ ] >$, а так как $\|\rho_{B,a}\| = |B|$, то $\|\rho_{B,a}\| = d$. Лемма доказана.

Теорема 3.7. *Пусть* $< A, [\ ] >$ *— конечная* n*-арная группа,* а $\in$ А, $< B, a >$ *— единственная подгруппа группы* $< A, a >$, *имеющая порядок* m, $\rho_{B,a}$ *— конгруэнция группы* $< A, a >$, *определяемая* $< B, a >$. *Тогда* $\rho_{B,a}$ *— единственная конгруэнция порядка* m n*-арной группы* $< A, [\ ] >$.

Доказательство. Так как отображение $\beta : x \to [ax\alpha]$, где α — обратная последовательность для а, является автоморфизмом группы $< A, a >$, и $< B, a >$ — её единственная подгруппа порядка m, то $[aB\alpha] = B$. Из единственности подгруппы порядка m в $< A, a >$ вытекает также инвариантность $< B, a >$ в $< A, a >$. Тогда по лемме 3.6, $\rho_{B,a}$ — конгруэнция порядка m конечной n-арной группы $< A, [\ ] >$.

Если σ — ещё одна конгруэнция порядка m конечной n-арной группы $< A, [\ ] >$, то по лемме 2.1, $\rho_{B,a}(a)$ и $\sigma(a)$ — инвариантные подгруппы группы $< A, a >$. Так как $< B, a >$ — единственная подгруппа порядка m в $< A, a >$, то из

$$|\rho_{B,a}(a)| = |\sigma(a)| = m$$

вытекает

$$\rho_{B,a}(a) = \sigma(a) = B,$$

откуда $\rho = \sigma$. Теорема доказана.

Следствие 3.8. *Для любого делителя* m *порядка конечной полуциклической* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$ *существует единственная ее конгруэнция порядка* m.

Доказательство. Так как $< A, a >$ — циклическая группа для любого а $\in$ А, то существует единственная подгруппа из $< A, a >$, имеющая порядок m. Тогда по теореме 3.7, $< A, [\ ] >$ обладает единственной конгруэнцией порядка m. Следствие доказано.

Напомним, что n-арная группа $< A, [\ ] >$ называется полунильпотентной [8], если её соответствующая группа Поста A_0 является нильпотентной.

Следствие 3.9. *Для любого множества простых чисел* π *в конечной полунильпотентной* n*-арной группе* $< A, [\ ] >$ *существует единственная ее* π*-холлова конгруэнция.*

Доказательство. Так как $< A, a >$ — нильпотентная группа для любого а $\in$ А, то в $< A, [\ ] >$ существует единственная инвариантная π-холлова подгруппа. Тогда по теореме 3.7 $< A, [\ ] >$ обладает единственной π-холловой конгруэнцией. Следствие доказано.

Так как согласно следствию 6 [9], конечная идемпотентная n-арная группа, где $n - 1$ простое, является полунильпотентной, то из следствия 3.9 вытекает

Следствие 3.10. *Для любого множества простых чисел* π *в конечной идемпотентной* n*-арной группе* $< A, [\ ] >$, *где* $n - 1$ *простое, существует единственная ее* π*-холлова конгруэнция.*

Следующая теорема является равносильной теореме 3.7.

Теорема 3.11. *Если соответствующая группа Поста* A_0 *конечной* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$ *имеет единственную подгруппу порядка* m, *то* $< A, [\ ] >$ *имеет единственную конгруэнцию порядка* m.

Доказательство. Так как группы A_0 и $< A, a >$ — изоморфны, то $< A, a >$ имеет единственную подгруппу порядка m. Тогда по теореме 3.7, $< A, [\ ] >$ имеет единственную конгруэнцию порядка m. Теорема доказана.

Теорема 3.12. *Если конечная идемпотентная n-арная группа $< A, [\,] >$ порядка $s = mk$ обладает конгруэнцией ρ порядка m, то существует точно k полуинвариантных n-арных подгрупп*

$$< B_1, [\,] >, \ldots, < B_k, [\,] >$$

порядка m, определяющих конгруэнцию $\rho = \rho_{B_1} = \ldots = \rho_{B_k}$, таких, что

$$A = B_1 \cup \ldots \cup B_k, B_i \cap Bj = \varnothing \ (i \neq j).$$

Доказательство. Пусть

$$A = \rho(a_1) \cup \ldots \cup \rho(a_k)$$

разложение A на непересекающиеся классы конгруэнции ρ. Полагая, $\rho(a_i) = B_i$, получим

$$A = B_1 \cup \ldots \cup B_k, B_i \cap Bj = \varnothing \ (i \neq j).$$

Так как $|\rho(a_i)| = m$, то $|B_i| = m$. По следствию 10.10 [3], $< B_i, [\,] >$ — полуинвариантная n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$ и $\rho = \rho_{B_i}$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.12 и следствия 3.10 вытекает

Следствие 3.13. *Для любого множества простых чисел π в конечной идемпотентной n-арной группе $< A, [\,] >$, где $n-1$ простое, существует точно $k = |A|_{\pi'}$ полуинвариантных π-холловых n-арных подгрупп $< B_1, [\,] >, \ldots, < B_k, [\,] >$, определяющих её единственную π-холлову конгруэнцию, таких, что*

$$A = B_1 \cup \ldots \cup B_k, B_i \cap Bj = \varnothing (i \neq j).$$

Теорема 3.14. *Для тернарной группы $< B_n, [\,] >$ отражений правильного n-угольника справедливы следующие утверждения:*

1) *для всякого делителя k числа n на $< B_n, [\,] >$ существует единственная конгруэнция ρ_k порядка k;*

2) *конгруэнция ρ_k определяется любой из n/k тернарных подгрупп порядка k тернарной группы $< B_n, [\,] >$;*

3) *множество всех классов конгруэнции ρ_k совпадает с множеством всех тернарных подгрупп порядка k в $< B_n, [\,] >$;*

4) $|B_n/\rho_k| = n/k$, *т.е. индекс ρ_k в $< B_n, [\,] >$ равен n/k.*

Доказательство. 1) Согласно 3) теоремы 11.1 [10], соответствующей группой для $< B_n, [\,] >$ является циклическая группа порядка n. Поэтому $< B_n, [\,] >$ — полуциклическая и, по следствию 3.8, на $< B_n, [\,] >$ существует единственная конгруэнция порядка k.

2) Согласно 6) теоремы 11.1 [10], в $< B_n, [\,] >$ имеется ровно n/k тернарных подгрупп порядка k, каждая из которых, по предложению 12.2 [10], полуинвариантна в $< B_n, [\,] >$. Тогда по предложению 7.4 [3], каждая такая тернарная подгруппа определяет конгруэнцию порядка k на $< B_n, [\,] >$. А так как ввиду 1) конгруэнция порядка k единственная, то все тернарные подгруппы порядка k определяют одну и ту же конгруэнцию.

3) Если $< K, [\,] >$ — некоторая тернарная подгруппа порядка k тернарной группы $< B_n, [\,] >$, то ввиду 2), множество всех классов $< B_n, [\,] >$ по ρ_k совпадает с множеством всех смежных классов $< B_n, [\,] >$ по $< K, [\,] >$, число которых равно n/k и каждая из них, согласно лемме 2 [11], является тернарной подгруппой порядка k тернарной группы $< B_n, [\,] >$.

4) Следует из 3). Теорема доказана.

Abstract. The author introduces and studies a concept of a Hall congruence of a finite n-ary group.

Литература

1. E.L. Post, *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc.**48**, No.2 (1940), 208–350.
2. С.А. Русаков, *Алгебраические n-арные системы*, Мінск, Навука і тэхніка, 1992.
3. А.М. Гальмак, *Конгруэнции полиадических групп*, Мінск, Беларуская навука, 1999.
4. А.М. Гальмак, *n-Арные аналоги холловских подгрупп*, Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова, № 2-3 (9) (2001), 117-123.
5. А.М. Гальмак, *Теоремы Поста и Глускина-Хоссу* Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 1997, 85 с..
6. А.М. Гальмак, *О решетке конгруэнций n-арной группы*, Веснік ВДУ ім. П. М. Машэрава, № 3 (2000) 60–62.
7. А.М. Гальмак, *n-Арные группы*, Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 196 с..
8. А.М. Гальмак *Полиадические группы, допускающие регулярный автоморфизм*, Гомель, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, № 5 (14) (2002), 104–111.
9. А.М. Гальмак, *Идемпотентные n-арные группы* , Весці НАНБ, № 2 (2000), 42–45.
10. А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев, *Тернарные группы отражений*, Мінск, Беларуская навука, 1998.
11. А.М. Гальмак, *Силовское строение идемпотентной n-арной группы*, Укр. мат. журнал, **53**, № 11 (2001), 1488–1494.

Могилевский государственный
университет продовольствия

Поступило 12.01.01