

ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ЗОННОЙ ПЛАСТИНКИ,
ИЗГОТОВЛЕННОЙ ОПТИЧЕСКИМ ПУТЕМ

Ф. А. Маркус

Предлагается и исследуется новое представление для поля за зонной пластинкой, изготовленной оптическим путем. Определяется разрешающая способность пластинки.

Зонной пластинкой, изготовленной оптическим путем, называют зафиксированную на фотопластинке интерференционную картину или, как чаще говорят, голограмму от двух сферических волн [1], центры которых лежат на линии, перпендикулярной фотопластинке.

Экспозиция такой фотопластинки $E(x, y)$ в точке с координатами x, y может быть записана в виде

$$E(x, y) = E_0 + E_1 \cos\left(\frac{kr^2}{2F} + \theta\right), \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; E_0, E_1, F и θ — постоянные величины, зависящие от радиусов волновых фронтов для точек в плоскости голограммы, при условии, что эти радиусы много больше размера голограммы. Амплитудная прозрачность голограммы $\tau(x, y)$ определяется видом зависимости τ от экспозиции E , которая в общем случае не линейна.

$$\tau(r^2) = \Phi[E(r^2)]. \quad (2)$$

Здесь r изменяется от 0 до a , где a — радиус зонной пластинки. Следовательно, $\tau(r^2)$ задается аппаратурой записи зонной пластинки на нескольких периодах переменной r . Удобнее считать переменной весь аргумент под знаком \cos , входящего в выражение (1). Обозначим этот аргумент через $u = kr^2/2F + \theta$.

$$u_{\min} = \theta \leq u \leq \frac{ka^2}{2F} + \theta = u_{\max}.$$

При любом виде зависимости (2) прозрачность $\tau(x, y)$ является периодической функцией величины r^2 с периодом, равным $2F\lambda$, что характерно для зонной пластинки. Функция $\tau(u)$ при любом возможном виде преобразования $\Phi(u)$ остается симметричной относительно своих максимальных и минимальных значений. При $u=0$ $\tau(u)$ принимает одно из этих значений. Поэтому можно продолжить $\tau(u)$ на все значения $-\infty < u < \infty$ четным образом. На рис. 1 изображены возможные виды зависимости τ от E . Если зависимость τ от E линейна, получающаяся голограмма называется габоровской зонной пластинкой (г. з. п.). Если же зависимость τ от E имеет вид Z характеристики, то голограмма совпадает с френелевой зонной пластинкой (ф. з. п.). В действительности наблюдается тот или иной промежуточный случай [1]. В качестве примера такого преобразования можно взять функцию

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\alpha \cos u). \quad (3)$$

Величина α характеризует степень нелинейности. При $\alpha \ll 1$ зависимость линейна. Примерный результат преобразования $\Phi(u)$ изображен

на рис. 2. В интервале $\theta < u < ka^2/2F + \theta$, показанном на рис. 2 сплошной линией, $\Phi(u)$ задается аппаратурой записи, а вне этого интервала функция продолжена четным образом. При $u=0$ $\Phi(u) = 1/2 - \text{arctg } \alpha / \pi$. Это минимальное из всех возможных значений $\Phi(u)$.

При восстановлении описанных выше голограмм получается ряд изображений, расположенных в плоскостях, находящихся на расстояниях F/m от голограммы, где $m=1, 2, 3, \dots$ [1]. В случае г. з. п. наблюдается одно изображение при $m=1$. В случае ф. з. п. изображения наблюдаются при $m=1, 3, \dots, 2l+1, \dots$

Поле в произвольной плоскости, находящейся на расстоянии z от восстанавливаемой голограммы, может быть записано при использовании приближения Кирхгофа в виде

$$p(x_0, y_0, z) = \frac{U_0 ik}{2\pi z} \iint_S \tau(r^2) \exp(ikR) dx dy, \quad (4)$$

где x_0, y_0, z — координаты точки наблюдения; U_0 — амплитуда плоской волны, просвечивающей голограмму; R — расстояние от точки с координатами $(x, y, 0)$ до точки наблюдения (x_0, y_0, z) .

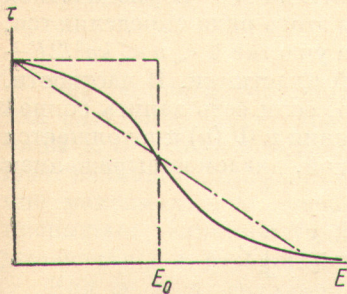


Рис. 1. Возможные зависимости амплитудной прозрачности от экспозиции.

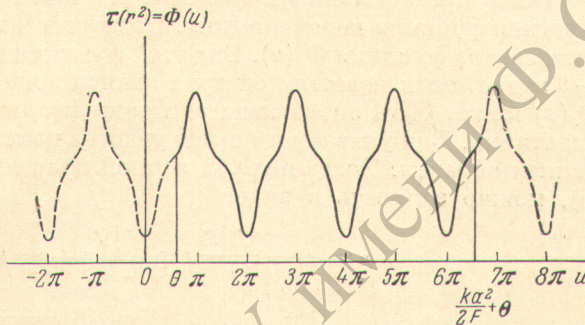


Рис. 2. Возможный вид зависимости амплитудной прозрачности от координаты на пленке.

татами $(x, y, 0)$ в плоскости голограммы до точки наблюдения. Если перейти к полярным координатам (как в плоскости голограммы, так и в плоскости наблюдения) с помощью равенств

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & x_0 &= \rho \cos \beta, \\ y &= r \sin \varphi, & y_0 &= \rho \sin \beta \end{aligned}$$

и произвести интегрирование по переменной φ , получим следующее выражение для поля:

$$p(\rho z) = \frac{U_0 i F}{z} \exp i \left[k \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) - \frac{F}{z} \theta \right] \int_{\theta}^{u_{\max}} \tau(u) \exp \left(\frac{i u F}{z} \right) \times \\ \times J_0 \left(\frac{k \rho}{z} \sqrt{\frac{2F}{k} (u - \theta)} \right) du, \quad (5)$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Исследованию поля за зонной пластинкой посвящен ряд работ. В работах [2-4] определялся поток энергии, направляющейся к каждому из изображений, создаваемых зонной пластинкой. Для этого прозрачность $\tau(r^2)$ сравнивалась с прозрачностью голограммы, полученной от n точечных источников, находящихся на расстояниях F/m от голограммы и записанной при условии пропорциональности τ и E . Сравнение прозрачностей позволяет определить интенсивности точечных источников и, следовательно, поток энергии, направляющийся к каждому из изображений. В работах [5-8] преобразуется выражение (5). Точное значение получено для поля на оси зонной пластинки. Для точек, не лежащих на оси, поле за зонной пластинкой представлено в виде суммы полей от свободного отвер-

ствия, взятых для бесконечного ряда пар значений ρ и z и умноженных на коэффициенты, пропорциональные полю пластинки на оси. В таком представлении провести исследование поля весьма затруднительно.

В настоящей работе предлагается и исследуется новое представление для поля в каждой из плоскостей, находящихся на расстоянии F/m от зонной пластинки. Поле в этих плоскостях рассматривается в двух случаях: когда центр зонной пластинки совпадает с центром диафрагмы, ограничивающей зонную пластинку, и когда эти центры смещены. Исследуется разрешающая способность зонной пластинки. Полученные результаты сравниваются с результатами эксперимента по восстановлению голограммы от объектов, которые могут рассматриваться как совокупность независимых точечных источников.

Для дальнейшего амплитудная прозрачность зонной пластинки представляется в виде ряда

$$\tau(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nu. \quad (6)$$

Такое представление возможно, так как величина τ — периодическая и четная функция переменного u . Коэффициенты этого ряда определяются, если задана функция $\Phi(u)$. Вид этой функции на участке $\theta < u < ka^2/2F + \theta$ задан, если известна система записи зонной пластинки. В частности, $\Phi(u)$ может быть определена экспериментально, если есть запись зонной пластинки. Вне указанного выше участка изменения u $\Phi(u)$ продолжается четным образом. Тогда поле за зонной пластинкой, даваемое выражением (5), можно записать в виде

$$p(\rho, z) = \frac{U_0 i F}{z} \exp i \left[k \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) - \frac{F}{z} \theta \right] \times \\ \times \left\{ a_0 \int_{\theta}^{u_{\max}} \exp \left(\frac{i u F}{z} \right) J_0 \left[\frac{k \rho}{z} \sqrt{\frac{2F}{k} (u - \theta)} \right] du + \right. \\ \left. + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \int_{\theta}^{u_{\max}} \exp \left[i \left(n + \frac{F}{z} \right) u \right] J_0 \left[\frac{k \rho}{z} \sqrt{\frac{2F}{k} (u - \theta)} \right] du \right\}. \quad (7)$$

В каждой из плоскостей наблюдения, определяемых условием $z = F/m$, из суммы можно выделить член с $n = m$, для которого интеграл выражения (7) просто вычисляется

$$p \left(\rho, \frac{F}{m} \right) = \frac{U_0 i k m}{F} \exp i k \left(\frac{F}{m} + \frac{\rho^2 m}{2F} \right) \left\{ \frac{a_m a^2}{4} \exp(-im\theta) \frac{2J_1 \left(\frac{mk\rho a}{F} \right)}{\frac{mk\rho a}{F}} + \right. \\ \left. + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \exp(-in\theta) O(n, \rho) + a_0 O(0, \rho) \right\}. \quad (8)$$

Здесь J_1 — функция Бесселя первого порядка. Знак штрих у суммы означает, что суммирование выполняется по всем $n \neq m \neq 0$. Функции $O(n, \rho)$, равные

$$O(n, \rho) = \int_0^a \exp \left[ik \frac{r^2}{2F} (m - n) \right] J_0 \left(\frac{mk\rho}{F} r \right) r dr,$$

зависят от ρ так же, как поле от свободного отверстия. Они могут быть выражены через функции Ломмеля. Значение функций $O(n, \rho)$ на оси диаграммы при $\rho = 0$ равно

$$O(n, 0) = \frac{F}{k(m-n)} \exp \left[\frac{ika^2}{4F} (m-n) \right] 2 \sin^2 \frac{ka^2}{4F} (m-n). \quad (9)$$

Предыдущее преобразование эквивалентно представлению любой зонной пластинки в виде суммы габоровских зонных пластинок. Выделение одного из слагаемых в плоскости $z=F/m$ соответствует тому, что одна из г. з. п. дает изображение в этой плоскости. Исследуем полученное выражение (8) для поля зонной пластинки.

В предельном случае для г. з. п. все $a_n=0$, кроме a_0 и a_1 . В плоскости $z=F$ поле равно

$$p(\rho, F) = \frac{U_0 i k}{F} \exp i k \left(F + \frac{\rho^2}{2F} \right) \times \\ \times \left\{ a_1 \frac{a^2}{4} \exp(-i\theta) \frac{2J_1\left(\frac{k\rho a}{F}\right)}{\frac{k\rho a}{F}} + a_0 O(0, \rho) + \frac{a_1}{2} \exp(i\theta) O(-1, \rho) \right\}. \quad (10)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются из выражения (1). В этом случае

$$\tau(r^2) = \beta E = \beta E_0 + \beta E_1 \cos\left(\frac{kr^2}{2F} + \theta\right),$$

$$a_0 = \beta E_0, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{\beta E_1}{2}.$$

Первое слагаемое достигает максимального значения на оси. Два других слагаемых могут достигать максимума при разных значениях величины ρ . Эти значения зависят от величины a , F и k . Максимум не превышает величины $2a_0 U_0$ для второго слагаемого и $a_1 U_0$ для третьего. Отношение максимального значения первого слагаемого к сумме двух других превышает величину $N\pi/2 (1+a_0/a_1)$, где N — число зон Френеля, укладывающихся в отверстии диафрагмы для точки $(0, F)$.

Для ф. з. п. величина n принимает все нечетные значения. Коэффициенты $a_0 = 1/2 \cdot a_n = (-1)^{j+1} 2/n\pi$, где $n = 2\zeta - 1$, $\zeta = 1, 2, \dots$. Коэффициенты a_n вычисляются с помощью формулы

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nu) \tau(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nu) du,$$

так как $\tau(u)$ постоянна и равна единице на первой и последней четверти периода изменения функции $\tau(u)$. При этом из (8) и (9) получаются известные значения поля на оси пластинки: $p = NU_0$ для четного числа зон Френеля N в отверстии диафрагмы для точки $(0, F)$ и $p = (N+1)U_0$ для нечетного числа при условии, что $\theta = \pi/2$, т. е. если пластинка имеет прозрачный центр.

Если преобразование $\Phi(u)$ имеет вид (3), коэффициенты a_n принимают следующее значение:

$$a_n = a_{2l+1} = M \frac{(-1)^{l+1} b^l}{2l+1}; \quad M = \frac{2}{\pi a} (\sqrt{1+a^2} - 1); \\ b = 1 = \frac{2}{\sqrt{1+a^2} + 1}. \quad (11)$$

Коэффициенты ряда вычисляются следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(u) \cos nudu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg(a \cos u) \right] \cos nudu,$$

откуда непосредственное вычисление дает вышеприведенное выражение для a_n (11).

Главный член ряда имеет величину такую же, какую дает линза радиуса a , освещенная плоской волной. Амплитуда плоской волны пропорциональна a_m . Каждое из остальных слагаемых ряда выражения (8) меняется гораздо медленнее главного слагаемого. В первом нуле главного

слагаемого эти члены имеют ту же величину, что и на оси. Эти члены размывают картину, создаваемую главным слагаемым. Величина размытия может быть оценена с помощью выражения (9). Коэффициенты a_n определены выше (11). Если даже завязать значение суммы всех слагаемых, кроме первого, заменив ее суммой наибольших значений, то и в этом случае отношение максимума первого слагаемого к сумме всех остальных в любой из плоскостей $z=F/m$ превышает величину N . При увеличении N это отношение растет, и поле зонной пластинки может описываться первым слагаемым выражения (8) для значений N порядка нескольких десятков.

Для произвольной зонной пластинки коэффициенты a_n убывают с ростом n быстрее, чем для ф. з. п. Отношение наибольшего значения первого слагаемого выражения (8) к сумме всех остальных также будет превышать величину N .

Так как поле зонной пластинки, освещенной плоской волной, практически во всех случаях может описываться первым слагаемым выражения (8), можно заключить, что зонная пластинка, прозрачность которой задается выражением (3), вставленная в диафрагму a , будет давать изображение такого же качества, как идеальная линза радиуса a с фокусным расстоянием F .

Разрешающая способность зонной пластинки, изготовленной оптическим путем, будет совпадать с разрешающей способностью линзы такого же размера. В нуле главного слагаемого и далее поправка к главному члену от суммы n слагаемых будет значительна. Но при оценке разрешающей способности по ширине кривой на уровне $1/2$ отличие от разрешающей способности линзы при $N=20$ составит величину, меньшую чем 1% от разрешающей способности линзы.

Рассмотрим теперь нецентрированное расположение зонной пластинки и диафрагмы. Пусть центр диафрагмы имеет координаты $x=0$, $y=0$, а центр пластинки $x=x_1$, $y=0$. Поле в точке (x_0, y_0, z) запишется в прежних обозначениях

$$p(\rho, z) = \frac{U_0 i k}{2\pi z} \exp i k \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \exp \left[-in \left(\theta + \frac{k x_1^2}{2F} \right) \right] \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp \left[i k r^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{n}{F} \right) \exp \left[i k \rho \frac{r}{z} \cos(\varphi - \beta) - i n k \frac{x_1}{F} r \cos \varphi \right] r dr d\varphi \right]. \quad (12)$$

В плоскостях $z=F/m$ это поле можно записать в виде

$$p \left(\rho, \frac{F}{m} \right) = \frac{U_0 i k m}{2\pi F} \exp i k \left(\frac{F}{m} + \frac{\rho^2 m}{2F} \right) \left\{ \frac{a_m a^2}{4} \exp \left[i m \left(\theta + \frac{k x_1^2}{2F} \right) \right] \frac{2J_1(L_m a)}{L_m a} + \right. \\ \left. + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} \exp \left[-in \left(\theta + \frac{k x_1^2}{2F} \right) \right] O(n, L) \right\}. \quad (13)$$

Здесь

$$L = \frac{k m}{F} \sqrt{\left(\rho \cos \theta - \frac{n x_1}{m} \right)^2 + \left(\rho \sin \theta \right)^2}, \quad L_m = L \text{ при } n = m,$$

$$O(n, L) = \int_0^a \exp \left[i k \frac{r^2}{2F} (m - n) \right] J_0(Lr) r dr.$$

Первое слагаемое имеет максимум в точках $\rho=x_1$, $\beta=0$, $z=F/m$ и дает в окрестности этих точек такое же изображение точечного источника, как линза радиуса a с фокусным расстоянием F . Таким образом, при нецентрированном расположении зонной пластинки каждая габоровская зонная пластинка дает сфокусированное изображение точечного источника при одних и тех же значениях полярных координат ρ и β . Расфокусированные изображения от габоровских пластинок, представленные бесконечным

рядом выражения (8), имеют несовпадающие центры и могут не перекрываться в плоскостях $z=F/m$. Максимумы поля расфокусированных изображений существенно меньше, чем максимум сфокусированного изображения.

На рис. 3 изображены положения центров сфокусированных (точки) и расфокусированных (крестики) изображений в плоскостях $z=F$, $z=F/2$ и $z=F/3$.

Отмеченный выше факт, что при нецентрированном расположении зонной пластинки и диафрагмы сфокусированные изображения точечного источника должны получаться в плоскости $z=F/m$ на одном и том же расстоянии от оси диафрагмы, можно сопоставить с результатами эксперимента, описанного в работе [9]. В этой работе приведены фотографии изображения, восстановленного с голограммы. Объектом при получении голограммы служил прозрачный транспарант в непрозрачном экране, находившийся в контакте с матовым стеклом. Этот объект можно рассматривать как совокупность независимых источников. Опорная волна падала на голограмму под углом α к плоскости голограммы. Величина α определяет смещение центров от каждого точечного источника относительно центра диафрагмы. Восстановление наблюдалось на расстояниях F , $F/2$ и $F/3$ от голограммы. В каждой из этих плоскостей можно видеть несколько изображений транспаранта слева и справа от оси. Одно из изображений, находящееся на одном и том же расстоянии от оси, четко сфокусировано, остальные полностью размыты. Это согласуется с полученным выше результатом, что при восстановлении голограммы от каждого точечного источника получается одно четкое изображение в плоскости $z=F/m$ на одном и том же расстоянии от оси для любого m .

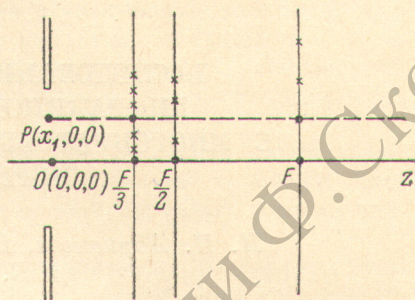


Рис. 3. Расположение центров сфокусированных и расфокусированных изображений в трех плоскостях, находящихся на расстояниях F , $F/2$ и $F/3$ от зонной пластинки, центр которой смещен относительно центра диафрагмы.

Литература

- [1] Н. М. Чау. Appl. Opt., 8, 1209, 1969.
- [2] М. Н. Норман, Н. М. Чау. Appl. Opt., 6, 317, 1967.
- [3] М. Н. Норман. Appl. Opt., 6, 1415, 1967.
- [4] М. Н. Норман. Appl. Opt., 6, 1001, 1967.
- [5] А. Болвин. J. Opt. Soc. Am., 42, 60, 1952.
- [6] Г. С. Уолдман. J. Opt. Soc. Am., 56, 215, 1966.
- [7] Н. Арсенault, А. Болвин, J. Appl. Phys., 13, 3988, 1967.
- [8] Н. Арсенault. J. Opt. Soc. Am., 58, 1536, 1968.
- [9] О. Брунгдahl, А. Лохман. J. Opt. Soc. Am., 58, 1325, 1968.

Поступило в Редакцию 7 июля 1970 г.