Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.54

О {2,3}-группах, в которых нет элементов порядка 6

Д.В. Лыткина[1], В.Д. Мазуров[2]

Светлой памяти Леонида Александровича Шеметкова

Изучаются {2,3}-группы без элементов порядка 6. Доказывается следующая теорема.
Теорема. *Пусть G – бесконечная непримарная {2,3}-группа без элементов порядка 6. Предположим, что любая подгруппа из G, порождённая двумя элементами порядка 3, конечна. Тогда G обладает одним из следующих свойств:*

(1) $G=O_3(G)\cdot T$, *где* $O_3(G)\neq 1$ *– абелева группа, T – локально циклическая или локально кватернионная 2-группа, действующая свободно на* $O_3(G)$.

(2) $G=O_2(G)\cdot R$, *где* $O_2(G)\neq 1$ *– нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R – 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующая свободно на* $O_2(G)$.

(3) $G=O_2(G)\cdot(R\cdot\langle t\rangle)$, *где* $O_2(G)\neq 1$ *– нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R – локально циклическая 3-группа, действующая свободно на* $O_2(G)$, *t – элемент порядка* 2, *переводящий при сопряжении каждый элемент из R в обратный.*

(4) $O_3(G)=1$, *силовская 3-подгруппа R из G не является локально циклической,* $N_G(R)$ *при сопряжении в R действует транзитивно на элементах порядка 3 из R, и любая силовская 3-подгруппа из G сопряжена с R.*
Ключевые слова: {2,3}-группа, локально циклическая группа, локально кватернионная группа, квадратичный автоморфизм.

In this paper, we study the {2,3}-groups which have no elements of order 6. The following theorem is proved.
Theorem. *Let G be an infinite non–primary {2,3}-group which have no elements of order 6. Suppose that every subgroup of G generated by elements of order3 is finite. Then G has on of the following properties:*

(1) $G=O_3(G)\cdot T$, *where* $O_3(G)\neq 1$ *is an abelian group, T is either a locally cyclic group or a locally quaternion 2-group which acts freely on* $O_3(G)$.

(2) $G=O_2(G)\cdot R$, *where* $O_2(G)\neq 1$ *is a nilpotent 2-group and the nilpotent length of* $O_2(G)$ *is at most 2, R is a 3-group with unique subgroup of order 3 and R acts freely on* $O_2(G)$.

(3) $G=O_2(G)\cdot(R\cdot\langle t\rangle)$, *where* $O_2(G)\neq 1$ *is a nilpotent 2-group and the nilpotent length of* $O_2(G)$ *is at most 2, R is a locally cyclic 3-group which acts freely on* $O_2(G)$, *t is an element of order* 2 *such that t transforms every element of R to inverse in conjunction in R.*

(4) $O_3(G)=1$, *the Sylow 3-subgroup R of G is not a locally cyclic group,* $N_G(R)$ *acts transitively on elements of R of order 3 in conjunction in R, and every Sylow 3-subgroup of G is conjugate with R.*
Keywords: {2,3}-group, locally cyclic group, locally quaternion group, quadratic automorphism.

Введение. В работе изучаются {2,3}-группы без элементов порядка 6. Начало таким исследованиям положила работа Б. Ноймана [1], в которой были классифицированы группы периода 6 без элементов порядка 6. Позднее локальную конечность групп периода 12 безэлементов порядка 6 установил И.Н. Санов [2], а Д.В. Лыткина [3] описала точное строение таких групп. Локальную конечность групп периода 24 без элементов порядка 6 доказал В.Д. Мазуров [4]. Вскоре аналогичный результат был получен Э. Джабарой и Д.В. Лыткиной для групп периода 36 [5], а затем Э. Джабарой, Д.В. Лыткиной и В.Д. Мазуровым и для групп периода 72 [6].

Основные результаты.

Теорема. *Пусть* G *– бесконечная непримарная* $\{2,3\}$*-группа без элементов порядка* 6. *Предположим, что любая подгруппа из* G, *порождённая двумя элементами порядка* 3, *конечна. Тогда* G *обладает одним из следующих свойств:*

(1) $G = O_3(G)\cdot T$, *где* $O_3(G)\neq 1$ *– абелева группа,* T *– локально циклическая или локально кватернионная* 2*-группа, действующая свободно на* $O_3(G)$*;*

(2) $G = O_2(G)\cdot R$, *где* $O_2(G)\neq 1$ *– нильпотентная* 2*-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух,* R *–* 3*-группа с единственной подгруппой порядка* 3*, действующая свободно на* $O_2(G)$*;*

(3) $G = O_2(G)\cdot (R\cdot\langle t\rangle)$, *где* $O_2(G)\neq 1$ *– нильпотентная* 2*-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух,* R *– локально циклическая* 3*-группа, действующая свободно на* $O_2(G)$, t *– элемент порядка* 2*, переводящий при сопряжении каждый элемент из* R *в обратный;*

(4) $O_3(G)=1$*, силовская* 3*-подгруппа* R *из* G *не является локально циклической,* $N_G(R)$ *при сопряжении в* R *действует транзитивно на элементах порядка* 3 *из* R*, и любая силовская* 3*-подгруппа из* G *сопряжена с* R.

Здесь $O_p(G)$ для простого числа p означает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. *Локально циклической* называется группа, любая конечно порождённая подгруппа которой является циклической, при этом локально циклической считается и циклическая группа. Бесконечная локально циклическая p-группа, где p – простое число, изоморфна группе

$$C_p = \langle a_0, a_1, \cdots \mid a_0^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \text{ для } i = 0,1,\ldots\rangle .$$

Локально кватернионная 2-группа – это либо конечная (обобщенная) группа кватернионов, либо объединение бесконечной возрастающей последовательности обобщенных кватернионных групп. Таким образом, бесконечная локально кватернионная группа изморфна группе

$$Q = \langle C_2, b \mid b^2 = a_0, a_i^b = a_i^{-1}, i = 0,1,\ldots\rangle .$$

Группа A, действующая на нетривиальной группе B, действует *свободно*, если $b^a\neq b$ для $1\neq a\in A$, $1\neq b\in B$. При этом само действие называется *свободным действием*.

Предварительные результаты.

Лемма 2.1 ([7, теорема 16.8.7]). *Группа порядка* $p^a q^b$*, где* p, q *– простые числа,* $a,b\in N$*, разрешима.*

Лемма 2.2 ([8, теорема V.8.15]). *Пусть конечная группа* H *действует свободно на конечной группе* V.

(1) *Если* $|H| = pq$*, где* p *и* q *– простые (не обязательно различные) числа, то* H *– циклическая группа.*

(2) *Если* $|H| = p^a$*, где* p *– простое число,* $a\in N$*, то при* $p>2$ *группа* H *циклическая, а при* $p=2$ *группа* H *– либо циклическая, либо (обобщённая) группа кватернионов.*

Автоморфизм α порядка n конечной группы G называется *расщепляющим*, если $gg^{\alpha}\cdots g^{\alpha^{n-1}} = 1$ для любого $g\in G$.

Лемма 2.3. (1) *Пусть* α *– расщепляющий автоморфизм порядка* 3 *группы* G. *Если* G *не содержит элементов порядка* 3*, то* G *нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей двух.*

(2) *Пусть* H *– нормальная подгруппа, а* x *– элемент порядка* 3 *из группы* G. *Если* $(hx)^3 = 1$ *для любого элемента* $h\in H$*, то* H *нильпотентна. Кроме того, если* H *не содержит элементов порядка* 3*, то* H *нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей двух, и* $\langle A, A^x\rangle = \langle A, A^x, A^{x^2}\rangle$ *– инвариантная относительно* $\langle x\rangle$ *подгруппа для любой подгруппы* A *из* H. *Если при этом* A *абелева, то* $\langle A, A^x\rangle = AA^x$ *абелева.*

Доказательство. Пункт (1) – это лемма 6 из [9].

(2) Так как $1 = (hx)^3 = hxhxhx = hh^{x^2}h^x$, то x^2 индуцирует в H расщепляющий автоморфизм порядка 3 и заключение о двуступенной нильпотентности H следует из (1).

Пусть A – подгруппа из H. Тогда $aa^x a^{x^2}=1$ для $a\in A$, откуда $A^{x^2}\le\langle A, A^x\rangle$, т.е. $\langle A, A^x\rangle=\langle A, A^x, A^{x^2}\rangle$ – инвариантная относительно $\langle x\rangle$ подгруппа.

Пусть теперь A абелева, $a\in A$. Так как $aa^x a^{x^2}=1$, то $a^{x^2}=(a^{-1})^x a^{-1}$ для любого $a\in A$. Заменяя в этом равенстве a на a^{-1}, получим $(a^{-1})^{x^2}=a^x a$, откуда $a^x aa^{x^2}=1$ и $aa^x=a^x a$ для любого $a\in A$. Пусть b – ещё один элемент из A. По доказанному

$$(a^x a)(b^x b)=(a^{-1})^{x^2}(b^{-1})^{x^2}=(a^{-1}b^{-1})^{x^2}=(ab)^x ab=a^x b^x ab,$$

т.е. $ab^x=b^x a$. Отсюда вытекает, что $[A, A^x]=1$, т. е. AA^x – абелева подгруппа. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если T – нетривиальная 2-группа, действующая свободно на периодической группе R, то R абелева, T обладает единственной подгруппой $\langle t\rangle$ порядка 2, $r^t=r^{-1}$ для любого $r\in R$ и T – локально циклическая или локально кватернионная группа.*

Доказательство. Пусть G – полупрямое произведение R на T и t – инволюция из T. Очевидно, что $C_{R\langle t\rangle}(t)=\langle t\rangle$. Выберем произвольный элемент r из R. Элемент $x=t^r t$ содержится в R и $x^t=x^{-1}$, поэтому порядок x нечётен и в $\langle t^r, t\rangle$ найдётся инволюция u, для которой $t^{ru}=t$. Отсюда $ru=t$, $r=ut$, $r^t=tu=r^{-1}$. Если $r_1, r_2\in R$, то $r_2^{-1}r_1^{-1}=(r_1r_2)^{-1}=(r_1r_2)^t=r_1^t r_2^t=r_1^{-1}r_2^{-1}$, откуда $r_1r_2=r_2r_1$ и R абелева.

Пусть u – инволюция из T, $1\ne r\in R$. По доказанному $r^u=r^{-1}$, т.е. $r^{ut}=r$. По условию $ut=1$, т.е. $u=t$ и t – единственная инволюция в T. По известной теореме Шункова (см. [10, лемма 4]) группа T локально циклическая или локально кватернионная. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть $F=\langle x, y \mid x^3=y^3=(xy)^3\rangle$. Тогда отображение $x\to a$, $y\to au$ продолжается до изоморфизма $\phi: F\to F_0$, где $F_0=\langle a, u, v \mid 1=a^3=[u,v], u^a=v, v^a=u^{-1}v^{-1}\rangle$ – расширение свободной абелевой группы $\langle u, v\rangle$ ранга 2 посредством группы автоморфизмов $\langle a\rangle$ порядка 3. При этом $u=(yx^{-1})^\phi$, $v=(x^{-1}y)^\phi$.*

Доказательство. Положим $b=yx^{-1}$, $c=x^{-1}y$. Тогда

$$[b,c]=b^{-1}c^{-1}bc=xy^{-1}y^{-1}xyx^{-1}x^{-1}y=(xy)^3=1.$$

Кроме того,

$$b^x=x^{-1}(yx^{-1})x=x^{-1}y=c,$$

$$c^x=x^{-1}(x^{-1}y)x=xyx=(yx^{-1})^{-1}(x^{-1}y)^{-1}=b^{-1}c^{-1}.$$

Эти вычисления показывают, что отображение $a\to x$, $u\to b=yx^{-1}$, $v\to c=x^{-1}y$ продолжается до гомоморфизма F_0 на $\langle x, yx^{-1}, x^{-1}y\rangle=F$. С другой стороны, $F_0=\langle a,u,v\rangle=\langle a,u,u^a\rangle=\langle a,u\rangle=\langle a, au\rangle$ и при этом

$$(au)^3=auauau=aua^{-1}a^{-1}ua\cdot u=u^a u^a u=u^{-1}v^{-1}\cdot v\cdot u=1,$$

$$(a\cdot au)^3=(a^{-1}u)^3=u^a u^{a^2}u=1.$$

Таким образом, отображение $x\to a$, $y\to au$ продолжается до гомоморфизма F на $F_0=\langle a, au\rangle$ и, следовательно, ϕ является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть G – группа, в которой нет элементарных абелевых подгрупп порядка 9, r – такой элемент порядка 3 из G, что для каждого $x\in G$ подгруппа $\langle r, r^x\rangle$ либо совпадает с $\langle r\rangle$, либо изоморфна A_4. Тогда $\langle x^G\rangle$ изоморфна $T\langle x\rangle$, где T – элементарная абелева нормальная в G 2-подгруппа.*

Доказательство. Это утверждение – частный случай теоремы 2 из [11].

Автоморфизм a абелевой группы V называется *квадратичным*, если найдутся такие целые числа m и n, что $v^{a^2}\cdot v^{ma}v^n=1$ для любого $v\in V$.

Лемма 2.7 [12, теорема 1]**.** *Периодическая группа, порождённая двумя квадратичными автоморфизмами абелевой группы,конечна.*

Лемма 2.8. *Пусть* G *– непримарная* $\{2,3\}$*-группа без элементов порядка* 6. *Если централизатор каждой инволюции из* G *– элементарная абелева* 2*-группа, то* G *удовлетворяет одному из пунктов* (1), (2) *заключения теоремы.*

Доказательство. Утверждение является частным случаем теоремы 2 из [13].

Доказательство теоремы. Пусть G – непримарная $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6.

Лемма 3.1 [6, теорема 1.2]. *Если* G *локально конечна, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $G = R \cdot T$, *где* R *– абелева нормальная в* G 3*-подгруппа,* T *–* 2*-группа с единственной подгруппой порядка* 2, *действующая свободно на* R;

(2) $G = T \cdot R$, *где* T *– нормальная нильпотентная* 2*-подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух,* R *– локально циклическая* 3*-подгруппа, действующая свободно на* T;

(3) $G = T \cdot (R \cdot \langle t\rangle)$, *где* T *– нормальная в* G *нильпотентная* 2*-подгруппа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух,* R *– локально циклическая* 3*-подгруппа, действующая свободно на* T *при сопряжении в* G, *и* $r^t = r^{-1}$ *для любого* $r \in R$.

Лемма 3.2. *Пусть* x, y *– элементы порядка* 3 *из* G *и* $K = A\langle x\rangle$ *– конечная подгруппа. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) K *является* 3*-группой;*

(2) *порядок одного из элементов* xy, xy^{-1} *равен* 3, *и* $K = A\langle x\rangle$, *где* $A = \langle u, v\rangle$ *– абелева нормальная в* K 2*-подгруппа,* $u^x = v$, $v^x = u^{-1}v^{-1}$.

Доказательство. Если не выполнен пункт (1), то K содержит элемент порядка 2. По лемме 3.1 K содержит нетривиальную нормальную 2-подгруппу T такую, что $K = T\langle x\rangle = T\langle y\rangle$ и порядок любого элемента из $K \backslash T$ равен 3. Так как оба элемента xy и xy^{-1} не могут содержаться в T, то порядок одного из них, скажем, элемента xy, равен 3. Теперь K является гомоморфным образом группы F из леммы 2.5, откуда вытекает, что для K выполнен пункт (2). Лемма доказана.

Лемма 3.3 [6, теорема 1.3(1)]. *Если* $O_2(G) \neq 1$ *или* $O_3(G) \neq 1$, *то для* G *выполнен один из пунктов* $(1)-(3)$ *заключения теоремы.*

Пусть далее G – группа, удовлетворяющая условиям теоремы.

Лемма 3.4. *Пусть* x *– элемент порядка* 3 *из* G, t *– инволюция из* G, $K = \langle x, t\rangle$. *Тогда* K *конечна и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) K *изоморфна знакопеременной группе* A_4 *степени* 4.

(2) *В* K *содержатся абелева* 2 *подгруппа* T *индекса* 6, *порождённая двумя элементами и нормальная в* K, *и элемент* y *порядка* 3, *для которых* $K = T\langle y, t\rangle$ *и* $y^t = y^{-1}$.

Доказательство. Пусть вначале $t \in X = \langle x, x^t\rangle$. По лемме 3.3 $K = T\langle x\rangle$, где T – абелева двупорождённая 2-подгруппа, нормальная в K. Очевидно, что $t \in K$, и поэтому $V = \langle t, t^x, t^{x^2}\rangle$ – элементарная абелева группа порядка 4. Поскольку V инвариантна относительно $\langle x\rangle$ и $K = \langle V, x\rangle$, то $K \cong A_4$.

Пусть теперь $t \notin X$. Так как X инвариантна относительно $\langle t\rangle$, то $K = X\langle t\rangle$ и $|K : X| = 2$.

Если X является 3–группой, то по лемме 2.4 она абелева и $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in X$ и, в частности, $x^t = x^{-1}$. В этом случае выполнен пункт (2) заключения с $T = 1$.

Если же X содержит элемент порядка 2, то по лемме 3.3 $O_2(X)$ является двупорождённой абелевой 2–группой и $X = O_2(X)\langle x\rangle$. Так как $Xtt^x = Xtx^{-1}tx = Xt^2 = X$, то $tt^x \in X$. Кроме того, $tt^x \notin T$, иначе $Tt^x = Tt$ и K/T абелева порядка 6. Значит, tt^x не является 2-элементом, и поэтому порядок $y = tt^x$ равен трём. Так как $y^t = y^{-1}$, то лемма доказана.

Лемма 3.5. *Если в* G *нет подгрупп, изоморфных симметрической группе* S_3 *степени* 3*, то выполнен один из пунктов* (1)*,* (2) *заключения теоремы.*

Доказательство. Действительно, в этом случае по лемме 3.4 любая инволюция t и любой элемент x порядка 3 из G порождает подгруппу, изоморфную A_4, в частности, порядок tx равен 3. Индукцией по n покажем, что для инволюций t_1, …, t_n порядок элемента $t_1 \cdots t_n x$ равен 3.

Для $n=1$ это, очевидно, верно. Если $t_2 \cdots t_n x$ – элемент порядка 3, то $\langle t_1, t_2 \cdots t_n x\rangle \cong A_4$, поэтому $t_1 \cdot t_2 \cdots t_n x$ – элемент порядка 3.

Пусть теперь T – подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G. Очевидно, что T нормальна в G. Пусть $a \in T$. По доказанному $1 = (ax^{-1})^3 = ax^{-1}ax^{-1}ax^{-1} = aa^x a^{x^2}$. Это означает, что x индуцирует в T расщепляющий автоморфизм порядка3. По лемме 2.3(1) T нильпотентна. Поскольку T порождается инволюциями, T – 2-группа. Теперь заключение следует из леммы 3.4.

Таким образом, для доказательства теоремы остаётся рассмотреть случай, когда в G содержится подгруппа S, изоморфная S_3. Пусть r – элемент порядка 3 и t – инволюция, порождающие S. Тогда $r^t = r^{-1}$.

Лемма 3.6. *Пусть* $R = C_G(r)$ *– абелева силовская* 3*-подгруппа из* G *и* $x^t = x^{-1}$ *для любого* $x \in R$*. Любая силовская* 3*-подгруппа из* G *сопряжена с* R*. Если для* G *не справедлив ни один из пунктов* $(1)-(3)$ *заключения теоремы, то любой элемент порядка* 3 *из* R *сопряжён в* $N_G(R)$ *с* r*.*

Доказательство. Подгруппа $\langle t\rangle$ действует свободно на 3-группе R, и по лемме 2.4 $x^t = x^{-1}$ для любого $x \in R$. Отсюда следует, что R совпадает с $C_G(x)$ для любого $x \in R$. Пусть R_1 – силовская 3-подгруппа из G, содержащая R. Пусть r_1 – элемент порядка 3 из R_1. По условию $H = \langle r, r_1\rangle$ – конечная 3-группа. Пусть r_2 – элемент порядка 3 из центра H. Тогда $r_2 \in R$ и $C_G(r_2) = R$. Отсюда $r_1 \in R$, т.е. R содержит все элементы порядка *3* из R_1. Поскольку любой элемент из R_1 централизует некоторый элемент порядка 3, R содержит любой элемент из R_1. Итак, R – силовская 3-подгруппа из G.

Понятно, что любая силовская 3-подгруппа из G, отличная от R, пересекается с R тривиально. Если R нормальна в G, то заключение леммы верно по лемме 3.3. Поэтому можно считать, что R не является нормальной в G.

Пусть y – элемент порядка 3, не лежащий в R, R_1 – силовская 3-подгруппа из G, содержащая y. Тогда $R \cap R_1 = 1$ и, как и выше, $\langle r, y\rangle$ не является 3–группой. По лемме 3.2 $\langle y\rangle$ сопряжена с $\langle r\rangle$ в $\langle r, y\rangle$, поэтому y сопряжен в $\langle r, y\rangle$ с r и r^{-1}. Так как $r^t = r^{-1}$, то y сопряжён с r в G. Поскольку любой элемент порядка 3 из R сопряжён с элементом, не принадлежащим R, то все элементы порядка 3 из R сопряжены с r. Аналогичное рассуждение показывает, что любая силовская 3-подгруппа из G сопряжена с R.

Пусть теперь y – элемент порядка 3 из R и $r = y^x$ для $x \in G$. Тогда $R = C_G(r) = C_G(y)^x = R^x$, т. *е.* $x \in N_G(R)$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Мы показали, что либо для G выполнен один из пунктов (1)–(4), либо в G существует подгруппа $S = \langle r, t\rangle$, где r – элемент порядка 3, t – инволюция, $r^t = r^{-1}$ и в G нет элементарных абелевых подгрупп порядка 9. Рассмотрим эту оставшуюся ситуацию.

Лемма 3.7. (1) *Уравнение* $x^2 = t$ *в* G *неразрешимо.*

(2) *Если* a *– элемент порядка* 4*,* x *– элемент порядка* 3 *из* G*, то* $K = \langle a^2, x\rangle \cong A_4$.

Доказательство. (1) Предположим противное. Поскольку $r^{x^2} = r^{-1}$, то x нормализует $\langle r, r^x\rangle$, и поэтому $\langle r, x\rangle$ – конечная группа. По лемме 3.1 $R = \langle r, r^x\rangle$ является 3–группой. По условию она циклическая и не обладает автоморфизмом порядка 4. Противоречие.

(2) Предположим противное. По лемме 3.4 в $K = T\langle y, t\rangle$, где T – нормальная в K 2–подгруппа, y сопряжен с x. Поскольку все инволюции из $K \setminus T\langle y\rangle$ сопряжены с t, то возникает противоречие с леммой 3.6. Лемма доказана.

Обозначим через Δ множество тех инволюций, которые являются квадратами элементов порядка 4 из G. Если Δ пусто, то в G нет элементов порядка 4, и поэтому централизатор каждой инволюции из G является элементарной абелевой 2–группой. По лемме 2.8 для G справедлив один из пунктов (1) или (2) заключения теоремы.

Пусть Δ непусто. Пусть $t_1,\ldots,t_n \in \Delta$, x – элемент порядка 3 из G.

Как и раньше, индукцией по n покажем, что порядок $t_1 \cdots t_n x$ равен 3. Это верно для $n=1$ по лемме 3.7. Пусть порядок $y = t_2 \cdots t_n x$ равен 3. Тогда по лемме 3.7 порядок $t_1 y = t_1 t_2 \cdots t_n x$ равен 3.

Пусть $T = \langle \Delta \rangle$. Тогда T нормальна в G и по предыдущему абзацу порядок любого элемента из смежного класса Tx равен трём. По лемме 2.3(2) T – нильпотентная группа. Поскольку T порождена инволюциями, то она является 2-группой. По лемме 3.3 G удовлетворяет одному из пунктов (1)–(3) заключения теоремы.

Литература

1. Neumann, B. H. Groups whose elements have bounded orders / B.H. Neumann // J. London Math. Soc. – 1937. – № 12. – P. 195–198.

2. Санов, И.Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 / И.Н. Санов // Ученые записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. Матем. – 1940. – № 55. – С. 166–170.

3. Лыткина, Д.В. Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 / Д.В. Лыткина // Сибирский матем. ж. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 353–358.

4. Мазуров, В.Д. О группах перида 24 / В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 6. – С. 766–781.

5. Джабара, Э. О группах периода 36 / Э. Джабара, Д.В. Лыткина // Сибирский матем. ж. – 2013. – Т. 54, №1. – С. 44–48.

6. Jabara, E. On groups of exponent 72 / E. Jabara, D.V. Lytkina, V.D. Mazurov // J. Groups Theory. – 2014. – Vol. 17, № 3.

7. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : Иностранная литература, 1962.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer–Verlag, 1967.

9. Журтов, А.Х. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса / А.Х. Журтов // Сибирский матем. ж. – 2000. – Т. 41, № 2. – С. 329–338.

10. Лыткина, Д.В. О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе / Д.В. Лыткина // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 3. – С. 379–387.

11. Мазуров, В.Д. Характеризация знакопеременных групп / В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, № 1. – С.54–69.

12. Журтов, А.Х. О квадратичных автоморфизмах абелевых групп / А.Х. Журтов // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 3. – С. 320–328.

13. Мазуров, В.Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инвол / В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, №1. – С. 74–86.

[1] Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения РАН

[2] Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 12.05.2014