УДК 535.55

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ДВОЙНОГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СВЕТА

О. Н. Найда

Показано, что действие двупреломляющей пластинки, создающей достаточно большую оптическую разность хода между поляризационными компонентами, на поляризацию немонохроматического света аналогично действию четвертьволновой пластинки на линейно поляризованный монохроматический свет. А именно, направление максимальной поляризации немонохроматической волны, вышедшей из указанной двупреломляющей пластинки, оказывается очень близким к какой-либо из главных оптических осей пластинки, независимо от направления максимальной поляризации у волны, падающей на пластинку, лишь бы это первоначальное направление поляризации не составляло бы с главными оптическими осями пластинки углы, близкие к 45°

Введение. Уточнение понятия монохроматичности волны при двойном лучепреломлении

Пусть имеется однородная двупреломляющая пластинка с вещественным симметричным тензором $\hat{\varepsilon}$ диэлектрической проницаемости, ограниченная плоскостями, перпендикулярными одной из осей анизотропии тензора $\hat{\varepsilon}$. Обозначим эту ось через x^3, а оси, лежащие в плоскости пластинки, через x^1 и x^2. Если пластинка одноосный, а не двухосный кристалл, то оптическую ось следует взять в плоскости пластинки так, чтобы она совпадала с одной из осей x^1, x^2.

Пусть на пластинку падает плоская, полностью либо частично поляризованная световая волна, распространяющаяся в направлении оси x^3. Волну, падающую на пластинку, мы будем называть первичной, а выходящую из пластинки — вторичной.

Как в случае монохроматической, так и в случае немонохроматической плоской световой волны направлением максимальной поляризации световой волны мы будем считать ориентацию электрических векторов, прошедших через поляроид-анализатор (не искажающий спектра неполяризованного света) при той его ориентации, когда суммарная (по длинам волн) интенсивность пропущенной им волны максимальна.

Хорошо известно [1], что если первичная волна монохроматична и линейно поляризована, а пластинка является четвертьволновой по отношению к этой световой волне, то у вторичной волны направление максимальной поляризации совпадает с одной из осей x^1, x^2, а именно, с той из осей, к которой ближе расположено первоначальное направление поляризации. Очевидно также, что аналогичным «выравнивающим» действием на направление максимальной поляризации монохроматической волны обладает и пластинка со всякой оптической разностью хода $\Delta\Lambda$, равной

$$\Delta\Lambda = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots; \tag{1}$$

если условие (1) выполнено неточно, то и «выравнивающее» действие пластинки будет соответственно сглажено. Критерием монохроматичности света следует, очевидно, считать условие

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{ср.}} \frac{\Delta\Lambda}{\lambda_{ср.}} \ll 1, \tag{2}$$

где $\delta\lambda$ — ширина спектра (в длинах волн). Здесь и в дальнейшем $\Delta\Lambda$ означает абсолютную величину оптической разности хода. Будем считать для определенности, что меньшая фазовая скорость у волны, поляризованной в направлении оси x^1.

Оказывается, что если свет немонохроматичен, т. е. если условие (2) нарушается, то двупреломляющая пластинка также «выравнивает» направление максимальной поляризации вторичной волны, причем в отличие от случая монохроматического света «выравнивание» происходит не только при каких-либо дискретных значениях $\Delta\Lambda$ типа (1), но и при всех достаточно больших $\Delta\Lambda$ (т. е. при $\Delta\Lambda \to \infty$). При этом если в первичной волне поляризационный тензор $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ монохроматических компонент не зависит или достаточно слабо зависит от частоты ω, то для широкого класса функций $f(\omega)$, описывающих распределение по энергиям в первичной (и, следовательно, вторичной) волне, условие «выравнивания»

$$|\varphi^{(2)}| \ll 1, \quad \text{либо} \quad \left| |\varphi^{(2)}| - \frac{\pi}{2} \right| \ll 1 \tag{3}$$

выполняется при следующем ограничении на $f(\omega)$ и $\Delta\Lambda$:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{\text{ср.}}} \frac{\Delta\Lambda}{\lambda_{\text{ср.}}} \gg 1,$$

или, что то же самое

$$\xi \gg 1, \quad \xi = \frac{\overline{\delta\omega}}{2\pi} \frac{\Delta\Lambda}{c} \left(\xi \approx \frac{\delta\lambda}{\lambda_{\text{ср.}}} \frac{\Delta\Lambda}{\lambda_{\text{ср.}}} \right). \tag{4}$$

Поляризационный тензор $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ для монохроматической волны мы будем подразумевать введенным так, как это делалось в [2], стр. 161; индексы α, $\beta = 1, 2$ означают номера координат x^1, x^2, введенных выше.

Величина $\varphi^{(2)}$ в (3) означает угол между направлением $\bar{\mathbf{n}}^{(2)}$ максимальной поляризации вторичной волны и осью x^1: $\bar{\mathbf{n}}^{(2)} = (\cos\varphi^{(2)}, \sin\varphi^{(2)})$. Для первичной волны аналогичные величины обозначим через $\varphi^{(1)}$ и $\bar{\mathbf{n}}^{(1)}$: $\bar{\mathbf{n}}^{(1)} = (\cos\varphi^{(1)}, \sin\varphi^{(1)})$. Будем считать, что $|\varphi^{(a)}| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $a = 1, 2$.

Функцию $f(\omega)$ мы будем нормировать следующим образом:

$$\int_0^\infty f(\omega)\, d\omega = 1. \tag{5}$$

Символом $\overline{\delta\omega}$ будем обозначать, как обычно, дисперсию частоты, т. е. $\left[\int_0^\infty (\omega - \bar{\omega})^2 f(\omega)\, d\omega\right]^{1/2}$, где $\bar{\omega} = \int_0^\infty \omega f(\omega)\, d\omega$.

Немонохроматический и монохроматический (точнее, почти монохроматический) свет мы будем представлять, как обычно, состоящим из волновых цугов конечной длины l, например, $l \sim 1$ см для случая, когда ширины линий составляют $\sim 10^{10}$ гц, как при спонтанном излучении (см. [1], стр. 597). Поэтому при $\Delta\Lambda \gtrsim l$ пластинка будет «выравнивать» направление поляризации вторичной волны просто вследствие некогерентности поляризационных компонент, вышедших из пластинки. При этом если $\delta\lambda/\lambda_{\text{ср.}} \sim 1$, то левая часть неравенства (4) по порядку величины приближается к $l/\lambda_{\text{ср.}} \sim 10^4$. Оказывается, однако (это будет показано далее), что в случае немонохроматического света (т. е. когда $\overline{\delta\omega}$ гораздо больше собственной ширины линии какого-либо дискретного спектра) значительный «выравнивающий» эффект может быть достигнут и при гораздо меньших $\Delta\Lambda$, чем $\Delta\Lambda \sim l$, в частности, при $\Delta\Lambda/\lambda_{\text{ср.}} \sim 10$, независимо от длин волновых цугов. Причина явления заключается здесь в чисто статистическом усреднении направлений поляризации монохроматических компонент вторичной волны. При этом в случае, когда $f(\omega)$

и $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ произвольны $\left(\text{но } \left|\,|\bar{\varphi}^{(1)}| - \frac{\pi}{4}\right| \sim 1\right)$, условие (3) выполняется, если выполнено следующее условие:

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty \rho_{12}(\omega) f(\omega) \exp\left(i\frac{\Delta\Lambda}{c}\omega\right) d\omega\right| \ll 1, \tag{4'}$$

которое, как мы увидим является обобщением условия (4).

Двупреломляющую пластинку будем считать однородной, абсолютно прозрачной, а также лишенной оптической активности и частотной дисперсии (т. е. имеется лишь двойное лучепреломление, как у сред с вещественными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости).

Поляризационные параметры немонохроматической волны

Из предыдущего следует, что само по себе явление «выравнивания» поляризации при $\Delta\Lambda \to \infty$ вполне очевидным образом вытекает как из квантовых, так и из классических представлений об электромагнитной волне. Нетривиальным является вопрос, в какой мере этот эффект наблюдаем, т. е. будут ли неравенства (3) выполняться уже при не слишком больших значениях параметров $\Delta\Lambda/\lambda_{\text{ср.}}$ и ξ (определение ξ см. выше).

Для того чтобы количественно оценить эффект «выравнивания» и, в частности, чтобы оценить степень независимости этого явления от параметров-функций $f(\omega)$ и $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$, характеризующих первоначальную волну, оказывается удобным, помимо параметров $\bar{\varphi}^{(1)}$, $\bar{\varphi}^{(2)}$, введенных выше, ввести также следующие параметры, характеризующие немонохроматическую волну:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)} &= \int\limits_0^\infty \rho_{\alpha\beta}^{(a)}(\omega) f(\omega)\, d\omega, \\ \bar{p}^{(a)} &= \left(I_{\max}^{(a)} - I_{\min}^{(a)}\right)\left(I_{\max}^{(a)} + I_{\min}^{(a)}\right)^{-1} \quad (a = 1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\rho_{\alpha\beta}^{(a)}(\omega)$ означает поляризационные тензоры (эрмитовы) монохроматических компонент в первичной и вторичной волнах; $I_{\max}^{(a)}$, $I_{\min}^{(a)}$ — соответственно максимальная и минимальная из интенсивностей, пропущенных анализатором при его всевозможных ориентациях по отношению к первичной ($a = 1$) и вторичной ($a = 2$) волнам.

Нетрудно убедиться, что компоненты тензора $\bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)}$ из (6) связаны с величинами $\bar{p}^{(a)}$, $\bar{\varphi}^{(a)}$ по формулам, аналогичным тем, которые имеют место в случае монохроматической волны (для сравнения см. [2], стр. 163)

$$\left.\begin{aligned} 2\bar{\rho}_{11}^{(a)} - 1 &= 1 - 2\bar{\rho}_{22}^{(a)}, \quad \operatorname{Re}\bar{\rho}_{12}^{(a)} = \operatorname{Re}\bar{\rho}_{21}^{(a)}, \\ 2\bar{\rho}_{11}^{(a)} - 1 &= \bar{p}^{(a)}\cos 2\bar{\varphi}^{(a)}, \quad 2\operatorname{Re}\bar{\rho}_{12}^{(a)} = \bar{p}^{(a)}\sin 2\bar{\varphi}^{(a)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости последних двух формул (7) (первые две вытекают непосредственно из (6)), разложим по монохроматическим волнам электрический вектор волны $\mathbf{E}^{(a)}(t)$, взятый в какой-либо фиксированной точке пространства

$$\mathbf{E}^{(a)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{(a)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{e}^{(a)}(-\omega) = \mathbf{e}^{(a)*}(\omega).$$

Отсюда для двухмерного тензора $W_{\alpha\beta}^{(a)}$, определенного в плоскости x^1, x^2

$$W_{\alpha\beta}^{(a)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha^{(a)}(t) E_\beta^{(a)}(t)\, dt, \tag{7a}$$

получаем

$$W_{\alpha\beta}^{(a)} = 4\pi \operatorname{Re}\int\limits_0^\infty e_\alpha^{(a)}(\omega) e_\beta^{(a)*}(\omega)\, d\omega,$$

или

$$W_{\alpha\beta}^{(a)} = W^{(a)} \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty \hat{f}(\omega)\, \hat{\rho}_{\alpha\beta}(\omega)\, d\omega, \quad W^{(a)} = W_{11}^{(a)} + W_{22}^{(a)},$$

$$\hat{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)}(\omega) = e_\alpha^{(a)} e_\beta^{(a)*} (|e_1^{(a)}|^2 + |e_2^{(a)}|^2)^{-1}, \quad \hat{f}(\omega) = 4\pi (|e_1^{(a)}|^2 + |e_2^{(a)}|^2)/W^{(a)}.$$

Легко видеть, что матрица $\hat{\rho}_{\alpha\beta}(\omega)$ и функция $\hat{f}(\omega)$ совпадают с матрицей $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$ и функцией $f(\omega)$, фигурировавшими выше и в формуле (6)

$$W_{\alpha\beta}^{(a)} = W^{(a)} \operatorname{Re} \bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)}. \tag{7б}$$

С другой стороны, из (7а) следует, что угол $\bar{\varphi}^{(a)}$ соответствует вектору $\mathbf{n}$ (двухмерному), обращающему в максимум свертку $\sum\limits_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta W_{\alpha\beta}^{(a)}$, следовательно, согласно (7б), и свертку $\sum\limits_{\alpha,\beta} \bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)} n_\alpha n_\beta$, как и в случае монохроматической волны. Аналогичным образом из (7а) получаем

$$\bar{p}^{(a)} = \left[\max_{(\mathbf{n})} \left(\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta W_{\alpha\beta}^{(a)}\right) - \min_{(\mathbf{n})} \left(\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta W_{\alpha\beta}^{(a)}\right)\right] \Big/ W^{(a)},$$

или при учете (7б) $\bar{p}^{(a)} = \max\limits_{(\mathbf{n})} \left(\sum\limits_{\alpha,\beta} \bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)} n_\alpha n_\beta\right) - \min\limits_{(\mathbf{n})} \left(\sum\limits_{\alpha,\beta} \bar{\rho}_{\alpha\beta}^{(a)} n_\alpha n_\beta\right)$. Отсюда элементарным образом выводятся две последние формулы [7].

Преобразование поляризационных параметров немонохроматической волны при двойном лучепреломлении

Выпишем (в выбранных выше осях x^1, x^2) очевидные формулы связывающие $\rho_{\alpha\beta}^{(2)}(\omega)$ и $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega)$

$$\rho_{11}^{(2)}(\omega) = \rho_{11}^{(1)}(\omega), \quad \rho_{12}^{(2)}(\omega) = \rho_{12}^{(1)}(\omega) \exp\left(i \frac{\Delta\Lambda}{c} \omega\right),$$

$$\rho_{21}^{(2)}(\omega) = \rho_{21}^{(1)}(\omega) \exp\left(-i \frac{\Delta\Lambda}{c} \omega\right), \quad \rho_{22}^{(2)}(\omega) = \rho_{22}^{(1)}(\omega).$$

Из этих формул получаем

$$\bar{\rho}_{11}^{(2)} = \bar{\rho}_{11}^{(1)}; \quad \bar{\rho}_{22}^{(2)} = \bar{\rho}_{22}^{(1)}; \tag{8}$$

$$\bar{\rho}_{12}^{(2)} = \int\limits_0^\infty \rho_{12}^{(1)}(\omega) f(\omega) \exp\left(i \frac{\Delta\Lambda}{c} \omega\right) d\omega. \tag{9}$$

Из (7), (8) получаем

$$\bar{p}^{(2)} \cos 2\bar{\varphi}^{(2)} = \bar{p}^{(1)} \cos 2\bar{\varphi}^{(1)}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} 2\bar{\varphi}^{(2)} = 2 \operatorname{Re} \bar{\rho}_{12}^{(2)} (\bar{p}^{(1)} \cos 2\bar{\varphi}^{(1)})^{-1}. \tag{11}$$

Из (10) следует, в частности, что в случае немонохроматического света, как и в случае монохроматического, направление максимальной поляризации вторичной волны всегда ближе к той из осей x^1, x^2, к которой ближе направление максимальной поляризации первичной волны. Из (11) и (9) следует, что если $\bar{p}^{(1)} \cos 2\bar{\varphi}^{(1)} \neq 0$, то выполняется (3) при выполнении условия (4′) независимо от вида функций $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $f(\omega)$, т. е. при достаточно больших $\Delta\Lambda$ «выравнивание» направления максимальной поляризации вторичной волны происходит всегда, если свет немонохроматичен, даже если $\Delta\Lambda$ не настолько велико, чтобы нарушить когерентность поляризационных компонент вторичной волны.

Количественные оценки явления «выравнивания» поляризации

Покажем, что существенное «выравнивание» поляризации может быть достигнуто, начиная с не слишком больших значений $\Delta\Lambda/\lambda_{\text{ср.}}$ ($\lambda_{\text{ср.}} = 2\pi c/\bar{\omega}$) для случаев, когда поляризация и спектр первичной волны имеют сравнительно простой вид, без особого труда поддающийся воспроизведению в лабораторных условиях.

Ограничимся рассмотрением простого, но достаточно важного случая, когда первичная волна линейно поляризована (полностью либо частично) и матрица $\rho_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega)$ (вещественная) не зависит от ω. Для этого случая из (7), (9) $\div$ (11) вытекает

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(2)} = \operatorname{Re}[F(\Delta\Lambda)] \operatorname{tg} 2\varphi^{(1)}, \tag{12}$$

где обозначено

$$F(\Delta\Lambda) = \int_0^\infty f(\omega) \exp\left(i \frac{\Delta\Lambda}{c} \omega\right) d\omega. \tag{13}$$

Поскольку $f(\omega)$ может быть отлично от нуля лишь при $\omega > 0$, то мы не можем, как в случае Фурье-преобразований, для каждой наперед заданной функции $F(\Delta\Lambda)$ подобрать такую функцию $f(\omega)$, чтобы из этой $f(\omega)$ заданная функция $F(\Delta\Lambda)$ получалась бы по формуле (13). Поэтому достаточно нетривиальным является вопрос, существуют ли такие $f(\omega)$, чтобы соответствующие им величины $|\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda)|$ были бы на несколько порядков меньше единицы (т. е. обеспечивали бы «выравнивающий» эффект), начиная уже с не слишком больших значений параметра $s = \Delta\Lambda/\lambda_{\text{ср.}}$, например, уже со значений $s \sim 5 \div 10$. Оказывается, что примеры требуемых функций построить несложно. Например, для спектральной функции $f(\omega) = \mathrm{const}\, \omega^{2n+1} (e^{\omega/\omega_0} - 1)^{-1}$, частный случай которой (при $n = 1$) есть планковская спектральная функция, с помощью формул (3. 951. 13) и (3. 411. 1) из [3] получаем

$$\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda) = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial b^{2n+1}} (\pi \operatorname{cth} b\pi - b^{-1}), \quad b = s \frac{\pi}{n+1} \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n+3)}, \tag{14}$$

где $\zeta(x)$ есть дзета-функция Римана. Легко видеть, что в формуле (14) уже при $s \geqslant (n + 1/\pi)^2$ справедлива асимптотика

$$\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda) = 1/2\, (-1)^n\, [(n+1)/\pi]^{2n+2} s^{-(2n+2)},$$

или

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda) &\approx -0.06 \cdot s^{-4} \quad \text{при} \quad n = 1, \quad s \geqslant 1,\\
\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda) &\approx 0.4 \cdot s^{-6} \quad \text{при} \quad n = 2, \quad s \geqslant 2,\\
\operatorname{Re} F(\Delta\Lambda) &\approx -3.4 \cdot s^{-8} \quad \text{при} \quad n = 3, \quad s \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Из рассмотренных примеров следует, что в случае достаточно гладких $f(\omega)$ экспериментальное наблюдение явления «выравнивания» поляризации представляет собой, по-видимому, несложную задачу.

Рассмотренный эффект может быть практически полезен в тех случаях, когда по какой-либо причине измерять направление поляризации волны, вышедшей из пластинки с большим $\Delta\Lambda$, проще, чем непосредственно (т. е. механическими приемами) измерять ориентацию осей анизотропии пластинки. Напомним, что достигнутая в настоящее время точность, с которой может быть измерено направление поляризации, велика и составляет 0.0001° ([4], стр. 196). Таким образом, пропуская через пластинку с большой разностью хода последовательно монохроматический и немонохроматический свет и сравнивая положение плоскостей поляризации вторичных волн, можно использовать описанный эффект либо для измерения оптической разности хода, даваемой пластинкой, либо для измерения длины волны монохроматического света.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. Л. Гинзбурга, В. П. Быкова, Я. А. Смородинского и участников их семинаров за обсуждение работы.

Литература

[1] Р. Дитчберн. Физическая оптика. Изд. «Наука», М., 1965.
[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Изд. «Наука», М., 1967.
[3] С. И. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
[4] У. Шерклифф. Поляризованный свет. Изд. «Мир», М., 1965.

Поступило в Редакцию 15 сентября 1969 г