Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

О конечных разрешимых группах с малыми порядками кофакторов подгрупп

С.М.Евтухова

Рассматриваются только конечные группы. Если G — группа H, — подгруппа группы G, то $core_G H = \bigcap_{g \in G} H^g$ — ядро подгруппы H в группе G. Ясно, что $core_G H$ является наибольшей нормальной подгруппой группы G, содержащейся в H. Кроме того, $core_G G = G$ для любой группы G.

Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $H/core_G H$. Через $|X|$ обозначается порядок подгруппы X, через E_{p^α} — элементарная абелева p-группа порядка p^α. Запись $M <_{\max} G$ обозначает, что M — максимальная подгруппа группы G, а $H \cdot\triangleleft G$ обозначает, что H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Другие обозначения и определения соответствуют [1].

Группы с различными условиями для кофакторов рассматривались рядом авторов (Поланд [2], Диксон, Ремтула [3], Е.Т. Огарков [4], Е.И. Хухро и др. [5]).

В частности, в работе [2] исследовались группы, все подгруппы которых имеют примарные циклические кофакторы. В работе [3] рассматривались разрешимые группы с p-нильпотентными кофакторами всех подгрупп или только максимальных подгрупп. В [4] изучены группы, все бипримарные подгруппы которых имеют примарные кофакторы, а также описаны конечные неразрешимые группы, все собственные подгруппы которых имеют примарные или бипримарные кофакторы. В работе [5] устанавливается метабелевость p-группы G, в которой $|H/core_G H| \leqslant p$, для всех подгрупп H из G.

В настоящем сообщении развивается тематика подобных исследований. Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть в конечной группе G кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превышающие числа n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $n \leqslant 11$, то

(1.1) группа G разрешима и $d(G/\Phi(G)) \leqslant n(G) \leqslant 3$;

(1.2) $l_2(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для любого $p > 2$;

(1.3) холлова $\{3,\ 5,\ 7\}'$-подгруппа 2-нильпотентна;

(1.4) холловы $\{5, 7\}$- и $\{7,\ 11\}$-подгруппы нильпотентны;

(1.5) холловы $\{p,\ 11\}$-подгруппы 11-замкнуты, для $p \in \{2,\ 3,\ 5\}$;

(1.6) холловы $\{3,\ q\}$-подгруппы q-замкнуты, для $q \in \{5,\ 7\}$;

(2) если $n \leqslant 7$, то холлова $\{3,\ 7\}'$-подгруппа 2-нильпотентна;

(3) если $n \leqslant 6$, то

(3.1) холлова $3'$-подгруппа 2-нильпотентна;

(3.2) фактор-группа $G/F(G)$ 5-замкнута;

(4) если $n \leqslant 5$, то $d(G/\Phi(G)) \leqslant n(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для любого $p \in \pi(G)$.

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, $d(X)$, $n(X)$ и $l_p(X)$ — соответственно производная, нильпотентная и p-длина разрешимой группы X. Напомним, что группа называется примитивной, если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром. В примитивной группе максимальная подгруппа с единичным ядром назывется примитиватором.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть в разрешимой примитивной группе G кофакторы подгрупп имеют порядки, не превышающие числа n. Тогда $G = [E_{p^\alpha}]M$, где $E_{p^\alpha} \cdot\triangleleft G$, $M <_{\max} G$, $core_G M = 1$ и для группы G возможны следующие варианты:*

(1) $\alpha = 1$, $M = 1$ *и* $G = Z_p$;

(2) $\alpha = 1$, $M \neq 1$ *и* $G = [Z_p]Z_{n_1}$, *где* $Z_{n_1} = M$ *и* n_1 *делит* $(p-1)$, $2 \leqslant n_1 \leqslant n$;

(3) $\alpha \geqslant 2$, $M \neq 1$ *и* $p^{\alpha-1} \leqslant n$, $2 \leqslant |M| \leqslant n$.

В частности, если в разрешимой примитивной группе G *кофакторы подгрупп имеют порядки, не превышающие числа* n, *и имеется подгруппа, порядок кофактора которой равен* n, *то возможны следующие варианты:*

(4) $G = [Z_p]Z_n$ *и* n *делит* $(p-1)$;

(5) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geqslant 2$, $p^{\alpha-1} = n$ *и* $2 \leqslant |M| \leqslant n-1$;

(6) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geqslant 2$, $p^{\alpha-1} \leqslant n$ *и* $|M| = n$.

Доказательство. Если G — примитивная разрешимая группа, то по теореме 25.8 из [6] получаем, что $G = [N]M$, где $M <_{\max} G$, $core_G M = 1$, то есть M — примитиватор группы G, а $N \cdot \lhd G$, $N = F(G) = E_{p^\alpha}$, $N = C_G(N)$, $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого p и $O_p(M) = 1$.

Если $\alpha = 1$ и $|M| = 1$, то $G = Z_p$ — циклическая группа простого порядка и в ней кофакторы подгрупп единичны.

Если $\alpha = 1$ и $|M| \neq 1$, то M — циклическая подгруппа группы G порядка, делящего $(p-1)$, так как $M \simeq G/N$ и изоморфна подгруппе группы автоморфизмов циклической группы порядка p. Поэтому $M \simeq Z_{n_1}$, $2 \leqslant n_1 \leqslant n$, $n_1|(p-1)$, порядки кофакторов всех подгрупп группы G не превышают числа n_1 и имеется подгруппа, порядок кофактора которой равен n_1.

Пусть $\alpha \geqslant 2$. Тогда $|M| = n_1 \geqslant 2$ и $n_1 \leqslant n$. Так как собственные подгруппы из N имеют единичные ядра в группе G, то $1 < p^{\alpha-1} \leqslant n$. Ясно, что у группы G кофакторы всех подгрупп не будут превосходить числа m и , кроме того, в группе G имеется подгруппа, порядок кофактора которой равен m, где $m = \max\{p^{\alpha-1},\ n_1\}$.

В частности, если в разрешимой примитивной группе G кофакторы подгрупп имеют порядки, не превышающие числа n, и имеется подгруппа, порядок кофактора которой равен n, то исключая из рассмотрения группы, у которых порядки кофакторов подгрупп не превосходят числа $n-1$, и имеется подгруппа, порядок кофактора которой равен $n-1$, получаем следующие варианты:

(4) $G = [Z_p]Z_n$ и $n|(p-1)$;

(5) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geqslant 2$, $p^{\alpha-1} = n$ и $2 \leqslant |M| \leqslant n-1$;

(6) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geqslant 2$, $p^{\alpha-1} \leqslant n$ и $|M| = n$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в конечной примитивной группе* G *кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превышающие числа* n. *Тогда:*

(1) если $n \leqslant 5$, *то* $G \in \{\ Z_p;\ [Z_p]Z_2;\ A_4;\ [Z_p]Z_3,\ 3|(p-1);\ [E_{3^2}]Z_{2^2};\ [Z_p]Z_{2^2},\ 4|(p-1);\ [E_{5^2}]Z_3;\ [Z_p]Z_5,\ 5|(p-1)\}$;

(2) если $n \in \{6,\ 7\}$, *то* $G \in \{\ S_4;\ [E_{2^3}]S_3;\ [E_{5^2}]S_3;\ [Z_p]Z_6,\ 6|(p-1);\ [E_{7^2}]Z_{2^2};\ [E_{7^2}]S_3;\ [E_{2^3}]Z_7;\ [Z_p]Z_7,\ 7|(p-1)\}$;

(3) если $n \in \{8,\ 9\}$, *то* $G \in \{\ [E_{2^4}]Z_5;\ [E_{2^4}]S_3;\ [E_{3^2}]A;\ [E_{5^2}]B;\ [E_{7^2}]C;\ [Z_p]Z_{2^3},\ 8|(p-1);\ [E_{2^4}]Z_{3^2};\ [E_{7^2}]Z_{3^2};\ [Z_p]Z_{3^2},\ 9|(p-1)\}$;

(4) если $n \in \{10,\ 11\}$, *то* $G \in \{\ [E_{2^4}]([Z_5]Z_2);\ [Z_p]([Z_5]Z_2),\ 10|(p-1);\ [E_{11^2}]Z_3;\ [E_{11^2}]Z_{2^2};\ [E_{11^2}]S_3;\ [E_{11^2}]Z_6;\ [E_{11^2}]D;\ [E_{11^2}]([Z_5]Z_2);\ [Z_p]Z_{11},\ 11|(p-1)\}$.

Здесь $|A| = |B| = |C| = |D| = 8$; $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство леммы 2 основано на применении леммы 1 и элементарной проверке.

Доказательство теоремы. Пусть для группы G выполняется условие теоремы. Докажем пункт (1.1). Предположим, что группа G, у которой кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превосходящие числа n, не содержится в классе $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, и пусть G — группа наименьшего порядка из разности класса всех групп, у которых порядки кофакторов всех подгрупп не превосходят числа n, и класса $\mathfrak{S}$.

Докажем, что G — простая группа. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и предположим противоположное, то есть G — не простая группа. Тогда существует $1 \neq N \neq G$ и $N \triangleleft G$. Нетрудно доказать что класс групп, у которых порядки кофакторов всех подгрупп не превосходят числа n, является наследственным гомоморфом, поэтому G/N и N есть группы, у которых порядки кофакторов подгрупп не превосходят числа n. Так как $|G/N| \leqslant |G|$ и $|N| \leqslant |G|$, то G/N и N — разрешимые группы по индукции, значит, G — разрешимая группа, противоречие. Следовательно, G — простая группа. А так как класс групп, у которых порядки кофакторов всех подгрупп не превосходят числа n, — наследственный класс, то все собственные подгруппы в группе G разрешимы.

Очевидно, что если порядки кофакторов всех подгрупп группы G не превосходит числа n и p — простое число, большее n, то любая p-подгруппа P нормальна в G, а так как по условию теоремы $n \leqslant 11$, то каждая подгруппа группы G имеет порядок не больше 11, в частности $\pi(G) \subseteq \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$.

Пусть $p \in \{7,\ 11\}$ и P — неединичная силовская p-подгруппа группы G. Тогда $|P| = p$ и $|N_G(P)| = p$. По теореме Бернсайда ([1], теорема IV.2.6) группа G p-нильпотентна, противоречие. Следовательно, $|P| = 1$ и $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$.

Так как $2^4,\ 3^3,\ 5^2$ не делят порядок группы G, то $|G| = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5$, где $\alpha \leqslant 3,\ \beta \leqslant 2$.

Если $\beta = 2$, то силовская 3-подгруппа в группе G абелева и самонормализуема, поэтому по теореме Бернсайда группа G 3-нильпотентна, противоречие. Значит $\beta = 1$ и $|G| = 2^\alpha \cdot 3 \cdot 5$, где $\alpha \leqslant 3$. Но теперь $\alpha = 2$ и $G \simeq PSL(2,5)$, а в $PSL(2,5)$ имеется подгруппа порядка 12, противоречие.

Следовательно, допущение неверно и класс всех групп, у которых порядки кофакторов всех подгрупп не превосходят числа 11, состоит из разрешимых групп.

Докажем вторую часть пункта (1.1). Из леммы 2 следует, что если G — разрешимая примитивная группа, у которой порядки кофакторов всех подгрупп не превосходит числа 11, то $G \subseteq \mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \cup \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$. Здесь $\mathfrak{A},\ \mathfrak{U}$ — формации всех абелевых и сверхразрешимых групп, а $\mathfrak{H}_p$ — класс всех p-групп из $\mathfrak{H}$ (смотри [6]).

Пусть $\mathfrak{F}$ — наименьшая насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \cup \cup \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$ и содержащаяся в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Предположим, что G — группа наименьшего порядка, у которой порядки кофакторов всех подгрупп не превосходят числа 11 и которая не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Ясно, что если $N_i \triangleleft G,\ i = 1,\ 2$, то порядки кофакторов всех подгрупп фактор-группы G/N_i не превосходят числа 11, так как класс групп, у которых порядки кофакторов всех подгрупп не превосходит числа 11, является наследственным гомоморфом. Поскольку $|G/N_i| < |G|$, то $G/N_i \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$ и можно считать, что в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа.

Рассмотрим подгруппу Фраттини группы G. Если $\Phi(G) \neq 1$, то у фактор-группы $G/\Phi(G)$ порядки кофакторов всех подгрупп не превосходит числа 11 и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, а так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$.

Так как в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, то $F(G) \cdot\!\triangleleft G$ и G — примитивная группа. Следовательно, исходя из леммы 2, $G \in \mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \cup \cup \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$. Так как $\mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \cup \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2^2 \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Поскольку $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$, то $n(G) \leqslant 3$, следовательно, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^3$ и $d(G/\Phi(G)) \leqslant 3$.

Таким образом, пункт (1.1) доказан.

Докажем пункт (1.2). Так как p-длина разрешимой группы равна p-длине соответствующей примитивной группы, а любая группа, у которой порядки кофакторов всех подгрупп не превосходит числа 11, является разрешимой, то просмотрев все примитивные группы, записанные в лемме 2, получаем, что $l_2(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для любого $p > 2$, и пункт (1.2) доказан.

Так как доказательства пунктов (1.3) – (1.6), (2) и (3.1) однотипны, то для краткости изложения приведём только доказательство пункта (3.1).

Пусть в конечной группе G кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превышающие 6. Предположим, что холлова $3'$-подгруппа H группы G не 2-нильпотентна. Тогда в группе H существует подгруппа Шмидта $S_{<2,p>}$ по лемме 1.5 из [7], $p \in \mathbb{P}$. В силу леммы 1.1(3) из [7] получаем $S_{<2,p>}/K = A$, где $K = Z(S_{<2,p>})$, $|A| = 2^m p$, $2^m \equiv 1(p)$, $m \in \mathbb{N}$.

Так как H — холлова $3'$-подгруппа , то $p > 3$. При $p = 5$ имеем $2^4 \equiv 1(5)$, но $2^3 > 6$. При $p > 7$ силовская p-подгруппа из A имеет кофактор порядка $p > 6$. Противоречие. Следовательно, холлова $3'$-подгруппа H группы G 2-нильпотентна, и пункт (3.1) доказан.

Докажем пункт (3.2). Рассмотрим произвольную группу G, у которой кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превышающие 6. Для любого $p > 6$ все силовские p-подгруппы нормальны в G. В частности, $G_{\{2,3,5\}'} \lhd G$, $G_{\{2,3,5\}'}$ абелева и $G_{\{2,3,5\}'} \subseteq F(G)$.

Рассмотрим группу G с $\pi(G) \subseteq \{2,\ 3,\ 5\}$. Предположим, что группа G не 5-замкнута. Тогда не 5-замкнута $\{p,\ 5\}$-холлова подгруппа H для некоторого $p \in \{2,\ 3\}$. Теперь H не p-нильпотентна и в ней существует подгруппа Шмидта $S_{<p,5>}$, $p \in \{2,\ 3\}$. Но $|S_{<2,5>}/\Phi(S_{<2,5>})| = 2^4 \cdot 5$ и у группы $S_{<2,5>}$ существует подгруппа, кофактор которой имеет порядок $2^3 > 6$, противоречие. Аналогично $|S_{<3,5>}/\Phi(S_{<3,5>})| = 3^4 \cdot 5$ и у группы $S_{<3,5>}$ существует подгруппа, кофактор которой имеет порядок $3^3 > 6$, противоречие.

Значит группа G, у которой кофакторы всех подгрупп имеют порядки, не превышающие 6, $\pi(G) \subseteq \{2,\ 3,\ 5\}$, 5-замкнута и пункт (3.2) доказан.

Доказательство пункта (4) проводится аналогично доказательству второй части пункта (1.1) и пункта (1.2) с заменой $\mathfrak{NA}^2$ на $\mathfrak{NA}$.

Теорема доказана.

Abstract. Let G be a finite group such that $|H/core_G H| \leq 11$ for every its subgroup H. It is proved that G is a soluble group of nilpotent length ≤ 3.

Литература

1. B.Huppert, *Endliche Gruppen I*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

2. J.Poland, *On Finite Groups whose Subgroups have Simple Core Factors*, Proc. Japan. Acad., **47** (1971), 606–610.

3. J.Dixon, J.Poland, A.Rhemtulla, *A generalization of hamiltonian and nilpotent groups*, Math. Z., **112** (1969), 335–339.

4. Е.Т.Огарков, *Конечные группы с определёнными свойствами кофакторов*, Весці АН Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук, **3** (1974), 118–120.

5. G.Cutolo, E.I.Khukhro, J.C.Lennox and J.Wiegold, S.Rinauro and H.Smith, *Finite core-p p-groups*, J. Algebra, **188** (1997), 701–719.

6. В.С.Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Гомель, 2003.

7. В.С.Монахов, *О подгруппах Шмидта конечных групп*, Вопросы алгебры, № 13 (1998), 153–171.

Гомельский государственный
университет им.Ф.Скорины

Поступило 26.10.04