Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.542

О F_S-вложенных подгруппах конечных групп

В.Н. Рыжик, Н.М. Адарченко

Пусть H – подгруппа конечной группы G. Пусть H^{sG} – пересечение всех тех S-перестновочных подгрупп группы G, которые содержат H, и H_{sG} – подгруппа группы H, порожденная всеми теми ее подгруппами, которые являются S-перестановочными G. Пусть F – некоторый класс групп. Тогда мы говорим, что подгруппа H является F_S-вложенной в G, если в G имеется такая подгруппа T, что $T \in$ F и $H^{sG} = H_{sG}T$. В данной работе мы изучаем влияние F_S-вложенных подгрупп на строение конечной группы. В частности, нами доказывается, что конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее нильпотентная подгруппа U_S – вложена в G.

Ключевые слова: конечная группа, S-ядро подгруппы, S-перестановочное замыкание подгруппы, F_S -вложенная подгруппа, силовская подгруппа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, нильпотентная группа.

Let H be a subgroup of a finite group G. Let H^{sG} be the intersection of all S-permutable subgroups of G which contain H and let H_{sG} be a subgroup of H which is generated by all such subgroups of H which are S-permutable in G. Let F be any class of groups. Then we say that a subgroup H is F_S -embedded in G provided G has a subgroup T such that $T \in$ F and $H^{sG} = H_{sG}T$. In the given paper we study the influence of the F_S -embedded subgroups on the structure of finite groups. In particular, we prove that a finite group G is supersoluble if and only if every its nilpotent subgroup is U_S -embedded in G.

Keywords: finite group, S-core of the subgroup, S-permutable closure of the subgroup, F_S -embedded subgroup, Sylow subgroup, soluble group, supersoluble group, nilpotent group.

Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Символы U и S обозначают соответсвенно класс всех сверхразрешимых групп и класс всех разрешимых групп.

Подгруппа H группы G называется S-квазинормальной или S-перестановочной в G, если $HE = EH$, для всякой силовской подгруппы E из G.

S-перестановочные подгруппы обладают целым рядом интересных свойств (см. главу 1 в книге [1]). В частности, S-перестановочные подгруппы образуют подрешетку решетки всех подгрупп группы (Кегель [2]). Этот важный факт лежит в основе применений следующих двух конструкций.

Пусть H – произвольная подгруппа группы G. Пусть H^{sG} – пересечение всех тех S-перестановочных подгрупп группы G, которые содержат H, и H_{sG} – подгруппа группы H, порожденная всеми теми ее подгруппами, которые являются S-перестановочными G. Тогда мы говорим, следуя [3] и [4], что H_{sG} – S-ядро подгруппы H в G и H^{sG} – S-перестановочное замыкание подгруппы H в G.

Понятия S-ядра и S-перестановочного замыкания являются основной мотивацией для введения следующего определения.

Определение. Пусть F – произвольный непустой класс групп. Тогда мы говорим, что подгруппа H группы G является F_S-вложенной в G, если в G имеется такая подгруппа T, что $T \in$ F и $H^{sG} = H_{sG}T$.

Значение F_S-вложенных подгрупп связано со следующими нашими результатами.

Теорема A. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда всякая силовская подгруппа группы G U_S – вложена в G.

Теорема B. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда всякая нильпотентная подгруппа группы G U_S – вложена в G.

В работе используются стандартные обозначения, которые при необходимости можно найти в книгах [5], [6], [7].

2 Предварительные результаты. Нам понадобятся следующие известные свойства S-перестановочных подгрупп, а также S-ядер и S-перестановочных замыканий подгрупп.

Лемма 2.1 (Кегель [1]). Пусть G – группа и $H \le K \le G$.

(1) Если подгруппа H является S-перестановочной в G, то H является S-перестановочной в K.

(2) Если H нормальна в G, то K/H является S-перестановочной в G/H в том и только в том случае, когда подгруппа K является S-перестановочной в G.

(3) Если H является S-перестановочной в G, то H является субнормальной подгруппой в G.

Лемма 2.2 [2, лемма 2.4]. Пусть G – группа и $H \le K \le G$.

(1) H_{sG} является S-перестановочной подгруппой G и $H_G \le H_{sG}$.

(2) $H_{sG} \le H_{sK}$.

(3) Если H нормальна в G, то $(K/H)_{s(G/H)} = K_{sG}/H$.

(4) Если H является либо холловской погруппой в G, либо максимальной подгруппой в G, то $H_{sG} = H_G$.

Лемма 2.3 [3, лемма 2.5]. Пусть G – группа и $H \le K \le G$.

(1) H^{sG} является S-перестановочной подгруппой G и $H^{sG} \le H^G$.

(2) $H^{sK} \le H^{sG}$.

(3) Если H нормальна в G, то $(K/H)^{s(G/H)} = K^{sG}/H$.

(4) Если H является либо холловской погруппой в G, либо максимальной подгруппой в G, то $H^{sG} = H^G$.

Лемма 2.4. Пусть H – подгруппа группы G.

(1) При любом $x \in G$ имеет место $(H^{sG})^x = (H^x)^{sG}$.

(2) При любом $x \in G$ имеет место $(H_{sG})^x = (H^x)_{sG}$.

Доказательство. (1) Пусть $E_1, \dots, E_t$ – множество всех таких S-перестановочных подгрупп группы G, которые содержат H. Тогда

$$H^x \le (H^{sG})^x = (E_1 \cap \dots \cap E_t)^x = E_1^x \cap \dots \cap E_t^x.$$

Если E – такая S-перестановочная подгруппа группы G, что $H^x \le E$, то $H \le E^{x^{-1}}$, где $E^{x^{-1}}$ – S-перестановочная подгруппа группы G. Поэтому для некоторого индекса i имеет место $E^{x^{-1}} = E_i$. Следовательно, $E = E_i^x$. Значит,

$$(H^{sG})^x = (H^x)^{sG}.$$

Утверждение (2) доказывается аналогично.

Лемма 2.5. Пусть $T \le A \le H$ и N – подгруппы группы G, где $H = AN$ и N нормальна в G.

(1) Если $TA_{sG} = A^{sG}$, то

$$TH_{sG} = H^{sG} = A^{sG}N.$$

(2) Если $TA = A^{sG}$, то

$$TH = H^{sG} = A^{sG}N.$$

Доказательство. (1) Понятно, что

$$TNA_{sG} = NA^{sG},$$

$$NA_{sG} \le H_{sG},$$

$$H^{sG} \le A^{sG}N.$$

Поскольку при этом $T \le A^{sG} \le H^{sG}$, то $TH_{sG} = A^{sG}N = H^{sG}$.

Утверждение (2) доказывается аналогично.

Лемма 2.6. Пусть $T \le A \le H$ и N – подгруппы группы G, где $H = AN$ и N нормальна в G.

(1) Если $TA_{sG} = A^{sG}$, то

$$(H / N)_{s(G/N)}(TN / N) = (H / N)^{s(G/N)}.$$

(2) Если $TA = A^{sG}$, то

$$(H / N)(TN / N) = (H / N)^{s(G/N)}.$$

Доказательство. (1) Согласно лемме 2.5 мы имеем $H^{sG} = H_{sG}T.$ При этом понятно, что $N \le H_{sG}$. Следовательно,

$$H^{sG} / N = (H / N)^{s(G/N)} = (H_{sG} / N)(TN / N) = (H / N)_{s(G/N)}(TN / N).$$

Утверждение (2) доказывается аналогично.

Лемма 2.7. [5, глава III, лемма 11.1]. Если H – минимальное добавление к нормальной подгруппе N группы G, то $H \cap N \le \Phi(H)$.

Доказательства теорем A и B.

Доказательство теоремы A. Достаточно показать, что если всякая силовская подгруппа группы G $\mathrm{F_S}$-вложена в G, то G разрешима. Предположим, что это неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть $p_1, \dots, p_t$ – множество всех простых делителей порядка группы G, и пусть P_i – силовская p_i-подгруппа в G для всех $i = 1, \dots, t.$

(1) G / N разрешима для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G.

Пусть P / N – силовская p-подгруппа в $G / N,$ где p – произвольный простой делитель порядка G / N. Пусть P_i – силовская p-подгруппа из P. Поскольку p не делит $|G:M|$ подгруппа P_i является силовской p-подгруппой в G и $P = P_i N.$ Согласно условию, в группе G найдется такая разрешимая подгруппа T, для которой имеет место $(P_i)_{sG}T = P_i^{sG}$. Поэтому по лемме 2.5 мы имеем $P_{sG}T = P^{sG}.$ Следовательно, по лемме 2.6 мы имеем

$$(P / N)_{s(G/N)}(TN / N) = (P / N)^{s(G/N)},$$

где $TN / N \simeq T / T \cap N$ – разрешимая группа. Таким образом, условие теоремы сохраняется для $G / N,$ и поэтому G / N разрешима в силу выбора группы G.

(2) $(P_i^{sG})_G \ne 1$ при всех $i = 1, \dots, t.$ Предположим, что $(P_i^{sG})_G = 1.$ Согласно условию теоремы в группе G найдется такая разрешимая подгруппа T, что $P_i^{sG} = T(P_i)_{sG}$. По лемме 2.3 (4),

$$(P_i)_{sG} = (P_i)_G.$$

Следовательно, $P_i^{sG} = T(P_i)_G.$ Но $(P_i)_G \le (P_i^{sG})_G = 1,$ и поэтому P_i^{sG} – разрешимая группа. Более того, по лемме 2.3 (4) имеет Место

$$P_i^{sG} = P_i^G.$$

Значит, обе группы G / P_i^G и P_i^G разрешимы. Но тогда группа G разрешима, что противоречит ее выбору. Таким образом, имеет место (2).

(3) Если D – пересечение всех S-пререстановочных замыканий в G всех силовских подгрупп группы G, то G / D – разрешимая группа.
Ввиду леммы 2.4 мы имеем

$$D = \cap_{x \in G}((P_1^x)^{sG} \cap \dots \cap (P_1^x)^{sG}) = \cap_{x \in G}((P_1^{sG})^x \cap \dots \cap (P_t^{sG})^x) = (P_1^{sG})_G \cap \dots \cap (P_t^{sG})_G.$$

Следовательное, согласно (2), G / D является подпрямым произведением разрешимых групп G / P_i^G, и поэтому G / D – разрешимая группа.

Заключительное противоречие. Пусть p – простой делитель порядка группы D и P – силовская p-подгруппа группы G. Тогда в G имеется такая разрешимая подгруппа T, что $P^{sG} = P_{sG}T.$ Пусть A – холловская р-подгруппа в T. Тогда A является холловской р'-подгруппой в P^{sG}. Так как D является нормальной подгруппой в P^{sG}, то из этого вытекает, что D имеет холловскую р'-подгруппу. Таким образом, для любого простого делителя p порядка группы D в этой группе имеется p-дополнение, поэтому D разрешима по теореме Холла [8, глава I, теорема 3.5]. Но тогда, ввиду (3), G – разрешимая группа. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы B. Достаточно показать, что если всякая нильпотентная подгруппа группы G U_S -вложена в G, то G сверхразрешима. Предположим, что это неверно и пусть G – контрпример минимального порядка.

(1) *G/N сверхразрешима для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G.*

Пусть E/N – произвольная нильпотентная подгруппа в G/N. Пусть H – минимальное добавление к N в E. Тогда $H \cap N \leq \Phi(H)$ по лемме 2.7. С другой стороны, $E/N = HN/N \simeq H/H \cap N$ – нильпотентная группа, и поэтому H нильпотентна. Таким образом, по условию теоремы в G имеется такая сверхразрешимая подгруппа T, для которой имеет место $T \leq H^{sG}$ и $H^{sG} = H_{sG}T.$ Ввиду леммы 2.5 имеет место

$$H^{sG}/N = (H/N)_{s(G/N)}(TN/N,$$

где $TN/N \simeq T/T \cap N$ – сверхразрешимая группа. Таким образом, условие теоремы остается справедливым для G/N. Следовательно, ввиду выбора группы G, G/N сверхразрешима.

(2) *Каждая собственная подгруппа группы G сверзразрешима.*

Пусть $H \leq E \leq G,$ где E – собственная подгруппа группы G и H нильпотентна.

Согласно условию теоремы, в G имеется такая сверхразрешимая подгруппа T, что $T \leq H^{sG}$ и $H^{sG} = H_{sG}T.$ Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает, что $H_{sG} \leq H_{sE}$ и $H^{sE} \leq H^{sG}.$ Таким образом,

$$H^{sE} = H^{sE} \cap H_{sG}T = H_{sG}(H^{sE} \cap T) = H_{sE}(H^{sE} \cap T).$$

Следовательно, условие теоремы выполняется относительно группы E. Поэтому, в силу выбора группы G, E сверхразрешима.

(3) *$G = N \rtimes M,$ где, для некоторого простого числа p, $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$ – минимальная подгруппа группы G и M – такая сверхразрешимая максимальная подгруппа в G, что $|G:M| > p.$*

В силу (2), G – минимальная несверхразрешимая группа. таким образом, G – разрешимая группа по [5, теорема 26.3]. Пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N является p-группой для некоторого простого числа p. Более того, в силу (1) и выбора группы G, N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $N = G^U$ – сверхразрешимый корадикал группы G. Таким образом, $N = C_G(N) = O_p(G)$ по [8, глава A, теорема 15.2].

(4) $Q_{sG} = 1$ *для любой нильпотентной подгруппы Q группы M.*

Ввиду леммы 2.3, Q_{sG} – S-перестановочная подгруппа в G. Следовательно, согласно лемме 2.1, Q_{sG} – субнормальная подгруппа в G. Значит, $Q_{sG} \leq F(G) = N \cap M = 1$ по [5, следствие 7.7.2].

(5) *M не является нильпотентной группой.*

Предположим, что M является нильпотентной группой. Тогда по условию в G имеется такая сверхразрешимая подгруппа T, что $M^{sG} = M_{sG}T.$ Поскольку M нильпотентна, то

$$M_{sG} \leq M \cap F(G) = M \cap N = 1$$

ввиду лемм 2.1 и 2.2 , и поэтому $M_{sG} = 1.$ Следовательно, $G = M^{sG} = T$ – свехразрешимая группа. Полученное противоречие показывает, что мы имеем (5).

Заключительное противоречие. Пусть Q – силовская q-подгруппа группы M, где q – наибольший простой делитель |M|. Согласно (2), G – минимальная несверхразрешимая группа, и поэтому в силу [5, теорема 26.5] выполняются следующие условия: (a) N является силовской подгруппой в G; (b) M является либо примарной группой, либо дисперсивной по Оре группой Шмидта. Так как в силу (5) группа M не является примарной, то M – группа Шмидта.

Пусть D – ненормальная максимальная подгруппа в M. Заметим, что D – нильпотентная группа, и поэтому в силу (4), $D_{sG} = 1$. Покажем, что $E = G$. Прежде заметим, что поскольку $D \le D^{sG} \cap M \le M$ и D максимальна в M, то либо $D = D^{sG} \cap M$, либо $D^{sG} \cap M = M$. Предположим, что имеет место первый случай. Тогда, ввиду лемм 2.1 и 2.3, D нормальна в M, что противоречит выбору подгруппы D. Следовательно, $D^{sG} \cap M = M$, т.е. $M \le D^{sG}$. Значит,

$$D^{sG} = D^{sG} \cap NM = M(D^{sG} \cap N).$$

Если $D^{sG} \cap N = 1$, то $D^{sG} = M$, и поэтому M субнормальна в G в силу лемм 2.1 и 2.3. Но тогда M нормальна в G, что влечет $N \le M$. Полученное противоречие показывает, что $D^{sG} \cap N \ne 1$, значит, $D^{sG} = G$. Следовательно, в силу равенства $D_{sG} = 1$, G сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin, New-York : Walter de Gruyter, 2010. – 334c.
2. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
3. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J.Alegebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
4. Guo, W. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
7. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышейшая школа, 2006. – 207 с.
8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 29.01.2014