Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Конечные группы с заданными максимальными Θ-парами

О.В.Титов

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Изучение влияния максимальных подгрупп на строение основной группы является одной из центральных задач теории конечных групп. В работе [1] был предложен новый подход к анализу данной задачи, основанный на понятии Θ-пары.

Напомним, что упорядоченная пара (C, D) подгрупп C и D группы G называется Θ-парой для максимальной подгруппы M, если D — нормальная подгруппа G, содержащаяся в C такая, что $DM = M$, $< C, M >= G$ и C/D не содержит собственных нормальных подгрупп G/D. Множество всех Θ-пар для M обозначается через $\Theta(M)$. На $\Theta(M)$ определим частичный порядок $\leq$, полагая $(A, B) \leq (C, D)$, если $A \leq C$. Очевидно, $\Theta(M)$ содержит максимальные элементы, и такие элементы мы будем называть, следуя [1], максимальными Θ-парами.

Используя эти понятия, можно получить новые характеризации для наиболее важных классов конечных и бесконечных групп (см., например, [1-3]).

Целью данной работы является получение локальных аналогов некоторых результатов работы [1]. В основе нашего подхода лежит введенное в работе [4] понятие нормального индекса максимальной подгруппы.

2. Предварительные сведения

Напомним определение нормального индекса.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Нормальным индексом подгруппы M называют порядок главного фактора H/K, где $H \not\subseteq M$ и $K \subseteq M$. Корректность такого определения базируется на следующем известном факте: если H_1/K_1 и H_2/K_2 — такие главные факторы группы G, что $H_1, H_2 \not\subseteq M$ и $K_1, K_2 \subseteq M$, то $H_1/K_1 \simeq H_2/K_2$. Мы будем обозначать нормальный индекс подгруппы M символом $|G : M|_n$.

В работе [4] доказана следующее свойство нормального индекса.

Лемма 2.1. *Пусть $M \leqslant G$ и N — нормальная подгруппа группы G такая, что $N \subseteq M$. Тогда $|G : M|_n = |G/N : M/N|_n$.*

Мы неоднократно будем использовать следующий факт о максимальных Θ-парахю

Лемма 2.2. *Если (C, D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$ и N — нормальная подгруппа группы G такая, что $N \subset D$, то $(C/N, D/N)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M/N)$. Если $(C/N, D/N)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M/N)$, то (C, D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется насыщенной формацией, если выполняются следующие условия: (1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; (2) группа $G \in \mathfrak{F}$, если она имеет такие нормальные подгруппы A и B, что $G/A \in \mathfrak{F}$, $G/B \in \mathfrak{F}$, и либо $A \leqslant \Phi(G)$, либо $A \cap B = 1$.

Лемма 2.3. (см. [5], с. 35). *Классы всех p-разрешимых, p-сверхразрешимых и p-нильпотентных групп являются насыщенными формациями.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1 *Группа G p-разрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p||G : M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C, D) \in \Theta(M)$ секция C/D p-разрешима.*

Доказательство. Предположим, что для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p||G : M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C, D) \in \Theta(M)$ секция C/D p-разрешима. Докажем, что в этом случаи G p-разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на несколько этапов.

(1) *Для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G/N p-разрешима.*

Пусть M/N — максимальная подгруппа группы G/N такая, что $p||G/N : M/N|_n$ и пусть $(C/N, D/N)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M/N)$. Тогда M — максимальная подгруппа группы G и по лемме 2.1, $p||G : M|_n = |G/N : M/N|_n$. Кроме того, согласно лемме 2.2, (C, D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$, значит, по условию C/D p-разрешима, что влечет p-разрешимость секции $(C/N)/(D/N) \simeq C/D$. Но $|G/N| < |G|$, и поэтому по выбору группы G мы заключаем, что G/N — p-разрешимая группа.

(2) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G = NM$, где M — максимальная подгруппа в группе G.*

Пусть N — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как по лемме 2.3 класс всех p-разрешимых групп образует насыщенную формацию, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причем $N \not\leq \Phi(G)$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $N \not\leq M$. Следовательно, $G = NM$ и $M_G = 1$.

(3) *Минимальная нормальная подгруппа N является pd-группой.*

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то в ввиду (1), факторгруппа $G/O_{p'}(G)$ p-разрешима. Тогда G p-разрешима. Полученное противоречие показывает, что $O_{p'}(G) = 1$ и, следовательно, N — pd-группа.

(4) *Порядок минимальной нормальной подгруппы совпадает с нормальным индексом максимальной подгруппы M в G.*

Так как $M_G = 1$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $|N| = |G : M|_n$.

(5) *Заключительное противоречие.*

Покажем, что $(N, < 1 >)$ является максимальной Θ-парой в $\Theta(M)$. Ясно, что $(N, < 1 >)$ является Θ-парой в $\Theta(M)$. Пусть $(N, < 1 >)$ не является максимальной Θ-парой, тогда существует Θ-пара $(R, < 1 >)$ такая, что $N < R$. Но тогда $R/ < 1 >$ имеет собственную нормальную подгруппу в $G/ < 1 >$, что противоречит определению Θ-пары. Значит, $(N, < 1 >)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$.

Так как N — pd-группа, то $p||N|$. Значит, из того, что $|N| = |G : M|_n$, следует, что $p||G : M|_n$. Поэтому $N \simeq N/ < 1 >$ p-разрешима, а значит, G p-разрешима. Это противоречие доказывает достаточное условие теоремы.

Доказательство необходимого условия тривиально вытекает из свойств p-разрешимых групп.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Группа G p-разрешима тогда и только тогда, когда $\pi(|G : X|) = \pi(|G : Y|)$ для любых двух различных максимальных подгрупп X и Y группы G с*

$p \mid |G:X|_n$ и $p \mid |G:Y|_n$ таких, что $\Theta(X)$ и $\Theta(Y)$ имеют общую максимальную Θ-пару (C,D) и $C/D \lhd G/D$.

Доказательство. Предположим, что $\pi(|G:X|) = \pi(|G:Y|)$ для любых двух различных максимальных подгрупп X и Y группы G с $p \mid |G:X|_n$ и $p \mid |G:Y|_n$ таких, что $\Theta(X)$ и $\Theta(Y)$ имеют общую максимальную Θ-пару (C,D) и $C/D \lhd G/D$.

Докажем, что в этом случаи G p-разрешима. Предположим, что это не так и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на несколько этапов.

(1) *Для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G/N p-разрешима.*

Пусть X/N и Y/N — две различные максимальные подгруппы группы G/N такие, что $p \mid |G/N : X/N|_n$ и $p \mid |G/N : Y/N|_n$, и $(C/N, D/N)$ максимальная Θ-пара в $\Theta(X/N)$ и в $\Theta(Y/N)$ такая, что $(C/N)/(D/N) \lhd (G/N)/(D/N)$. Тогда X и Y — различные максимальные подгруппа группы G и по лемме 2.1, $p \mid |G:X|_n = |G/N : X/N|_n$ и $p \mid |G:Y|_n = |G/N : Y/N|_n$. Кроме того, $C/D \lhd G/D$ и согласно лемме 2.2, (C,D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(X)$ и $\Theta(Y)$, значит, по условию $\pi(|G:X|) = \pi(|G:Y|)$, что влечет $\pi(|G/N : X/N|) = \pi(|G/N : Y/N|)$. Но $|G/N| < |G|$, и поэтому по выбору группы G мы заключаем, что G/N — p-разрешимая группа.

Следующие три утверждения доказываются аналогично теореме 3.1.

(2) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G = NX$, где X — максимальная подгруппа в группе G с $X_G = 1$.*

(3) *Минимальная нормальная подгруппа N является pd-группой.*

(4) *Порядок подгруппы N совпадает с нормальным индексом максимальной подгруппы X.*

(5) *Заключительное противоречие.*

Покажем, что $(N, <1>)$ является максимальной Θ-парой в $\Theta(X)$. Ясно, что $(N, <1>)$ является Θ-парой в $\Theta(X)$. Пусть $(N, <1>)$ не является максимальной Θ-парой, тогда существует Θ-пара $(R, <1>)$ такая, что $N < R$. Но тогда $R/<1>$ имеет собственную нормальную подгруппу в $G/<1>$, что противоречит определению Θ-пары. Значит, $(N, <1>)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(X)$.

Так как N — pd-группа, то $p \mid |N|$. Значит, из того, что $|N| = |G:X|_n$, следует, что $p \mid |G:X|_n$.

Пусть $q \mid |G:X|$. Пусть N_q является силовской q-подгруппой группы N и $N_1 = N_G(N_q)$. Тогда, используя лемму Фраттини, получаем, что $G = NN_1$. Поскольку N — неабелевая минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N_q \neq N$ и $N_1 \neq G$. Пусть Y — максимальная подгруппа группы G такая, что $N_1 \subseteq Y$. Тогда $N \not\subseteq Y$. Пусть P является силовской q-подгруппой группы G такой, что $N_q \subseteq P$. Тогда $N_q = N \cap P$. Значит, $P \not\subseteq N$ и $q \nmid |G:Y|$. Но $(N, <1>)$ — общая максимальная Θ-пара в $\Theta(X)$ и в $\Theta(Y)$ и по условию $\pi(|G:X|) = \pi(|G:Y|)$, значит, $q \mid |G:Y|$. Это противоречие доказывает достаточное условие теоремы.

Доказательство необходимого условия тривиально вытекает из свойств p-разрешимых групп.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Группа G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p \| G:M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C,D) \in \Theta(M)$ такой, что $C/D \lhd G/D$, индекс $|C:D|$ — простое число.*

Доказательство. Предположим, что для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p \mid |G:M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C,D) \in \Theta(M)$, такой что $C/D \triangleleft G/D$, индекс $|C:D|$ — простое число.

Докажем, что в этом случаи G p-сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на несколько этапов.

(1) *Для любой нееденичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G/N p-сверхразрешима.*

Пусть M/N — максимальная подгруппа группы G/N такая, что $p \mid |G/N : M/N|_n$, и пусть $(C/N, D/N)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M/N)$, такая что $(C/N)/(D/N) \triangleleft (G/N)/(D/N)$. Тогда M — максимальная подгруппа группы G и по лемме 2.1, $p \mid |G : M|_n = |G/N : M/N|_n$. Кроме того, согласно лемме 2.2, (C, D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$ и $C/D \triangleleft G/D$, значит, по условию $|C/N : D/N| = |C : D|$ — простое число. Но $|G/N| < |G|$, и поэтому по выбору группы G мы заключаем, что G/N — p-разрешимая группа.

Следующие три утверждения доказываются аналогично теореме 3.1.

(2) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G = NM$, где M — максимальная подгруппа в группе G с $M_G = 1$.*

(3) *Минимальная нормальная подгруппа N является pd-группой.*

(4) *Порядок подгруппы N совпадает с нормальным индексом максимальной подгруппы M.*

(5) *Заключительное противоречие.*

Так как N — pd-группа, то $p \mid |N|$. Значит, из того, что $|N| = |G : M|_n$, следует, что $p \mid |G : M|_n$.

Покажем, что $(N, <1>)$ является максимальной Θ-парой в $\Theta(M)$. Ясно, что $(N, <1>)$ является Θ-парой в $\Theta(M)$. Пусть $(N, <1>)$ не является максимальной Θ-парой, тогда существует Θ-пара $(R, <1>)$ такая, что $N < R$. Но тогда $R/<1>$ имеет собственную нормальную подгруппу в $G/<1>$, что противоречит определению Θ-пары. Значит, $(N, <1>)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$ и $|N|$ — простое число.

Значит, G p-сверхразрешима. Это противоречие доказывает достаточное условие теоремы.

Пусть группа G p-сверхразрешима, M — максимальная подгруппа группы G с $p||G : M|_n$ и (C, D) — максимальная Θ-пара такая, что $C/D \triangleleft G/D$. Тогда секция C/D является главным фактором и $|C : D|$ — простое число.

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p||G : M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C, D) \in \Theta(M)$ центр $Z(G/D) \neq 1$.*

Доказательство. Предположим, для каждой максимальной подгруппы M группы G с $p||G : M|_n$ и для каждой максимальной Θ-пары $(C, D) \in \Theta(M)$ секция $Z(G/D) \neq 1$. Докажем, что в этом случаи G p-нильпотентна. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на несколько этапов.

(1) *Для любой нееденичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G/N p-нильпотентна.*

Пусть M/N — максимальная подгруппа группы G/N такая, что $p||G/N : M/N|_n$ и пусть $(C/N, D/N)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M/N)$. Тогда M — максимальная подгруппа группы G и по лемме 2.1, $p||G : M|_n = |G/N : M/N|_n$. Кроме того, согласно лемме 2.2, (C, D) — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$, значит, по условию $Z(G/D) \neq 1$, что влечет $Z((G/N)/(D/N)) \neq 1$. Но $|G/N| < |G|$ и поэтому по выбору группы G мы заключаем, что G/N — p-нильпотентная группа.

Следующие три утверждения доказываются аналогично теореме 3.1.

(2) *Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G = NM$, где M — максимальная подгруппа в группе G.*

(3) *Минимальная нормальная подгруппа N является pd-группой.*

(4) *Порядок минимальной нормальной подгруппы совпадает с нормальным индексом максимальной подгруппы M в G.*

(5) *Заключительное противоречие.*

Покажем, что $(N, <1>)$ является максимальной Θ-парой в $\Theta(M)$. Ясно, что $(N, <1>)$ является Θ-парой в $\Theta(M)$. Пусть $(N, <1>)$ не является максимальной Θ-парой, тогда существует Θ-пара $(R, <1>)$ такая, что $N < R$. Но тогда $R/<1>$ имеет собственную нормальную подгруппу в $G/<1>$, что противоречит определению Θ-пары. Значит, $(N, <1>)$ — максимальная Θ-пара в $\Theta(M)$.

Так как N — pd-группа, то $p||N|$. Значит, из того, что $|N| = |G : M|_n$, следует $p||G : M|_n$. Поэтому теоремы $Z(G/1) \neq 1$, а значит, $G = MZ(G)$ и M — нормальная подгруппа группы G. Следовательно, G p-нильпотена. Это противоречие доказывает достаточное условие теоремы.

Доказательство необходимого условия тривиально вытекает из свойств p-нильпотентных групп.

Теорема доказана.

Abstract. For a maximal subgroup M of a finite group G, a Θ-pair is a pair of subgroups (C, D) of G such that (i) $D \trianglelefteq G$, $D \subset C$, (ii) $<M, C> = G$, $<M, D> = M$ and (iii) C/D has no proper G-normal subgroup. A natural partial ordering is defined on the family of Θ-pairs. We obtain several results on the maximal Θ-pairs which imply G to be p-solvable, p-supersolvable or p-nilpotent.

Литература

1. N.P. Mukherjee, P. Bhattacharya, *On theta pairs for a maximal subgroup*, Proc. Amer. Math. Soc., **109** (1990), 589–596.

2. J.C. Beidleman, H. Smith,*A note on supersoluble maximal subgroups and theta pairs*, Publicasious Matematiques, No. 37 (1993), 91–94.

3. X. Guo, *On theta pairs for a maximal subgroup*, Comm. Algebra, No. 22 (1994), 4653–4659.

4. W. E. Deskins, *On maximal subgroups*, Proc. Sympos. Pure Math., 1 (1959), 100–104.

5. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978, с. 272.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 05.10.04