Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О конечных группах с условием плотности для обобщенно субнормальных подгрупп

А.Э.Шмигирев

Все рассматриваемые группы конечны. В статье используются обозначения и терминология из [4, 6]. Через $G_{p'}$ будем обозначать p'-холлову подгруппу группы G.

В работе [1] дано описание групп с плотной системой субнормальных подгрупп, т.е. групп, удовлетворяющих следующему условию: для любых двух различных подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G существует такая субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq N \subseteq K$ (задача С.Н.Черникова). Эти группы разрешимы. Поэтому класс групп с плотной системой субнормальных подгрупп в точности совпадает с классом групп с плотной системой $\mathfrak{N}$-субнормальных подгрупп, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп.

Более общая задача изучения конечных групп с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация, поставлена в 1984 г. Л.А.Шеметковым.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Группа G называется группой с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, если для любых двух различных подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G существует такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq N \subseteq K$.

В настоящей работе рассматривается случай, когда G — группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, где $\mathfrak{F}$ — произвольная насыщенная S-замкнутая формация φ-дисперсивных групп, либо произвольная насыщенная S-замкнутая формация сверхразрешимых групп.

При доказательстве основной теоремы используются следующие результаты:

Теорема 1 ([5]; см. также [6], теорема 15.10). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — группа, у которой $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентен. Пусть H и M — такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$ и $HF(G) = G$. Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 2 (см. [3, 7]). (1) *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$. Если каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа для некоторого простого p. Если же каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа любой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то $|\pi(G^{\mathfrak{F}})| \leq 2$.*

(2) *Если G —группа Шмидта с нормальной абелевой силовской p-подгруппой $P \neq \neq 1$, то P элементарна.*

Теорема 3 (см. [8, 9]). *При заданных p, α, q существует единственная группа Шмидта G_0 максимального порядка $p^\alpha q^{\beta_0}$, где $\beta_0 = b$ при $b \equiv 1 \pmod 2$, $\beta_0 = \frac{3}{2}b$ при $b \equiv 0 \pmod 2$, b — порядок q по модулю p. Все остальные группы Шмидта порядка вида $p^\alpha q^\beta$ изоморфны факторгруппам группы G_0 по ее центральным нормальным подгруппам.*

Теорема 4 (см. [10], с. 350). *Пусть G — группа операторов абелевой группы V, причем $(|V|, |G|) = 1$. Тогда $V = [V, G] \times C_V(G)$.*

Теорема 5 (Гашюц [11]). Пусть K — нормальная абелева подгруппа группы G. Если для любого простого p подгруппа $G_p \cap K$ дополняема в G_p, то K дополняема в G.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация, H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$;

2) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap N$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в N, где N — произвольная подгруппа из G;

3) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $K \trianglelefteq G$, то HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $\mathfrak{F}$ является подформацией формации $\mathfrak{H}$, то H $\mathfrak{H}$-субнормальна в G.

Следующая лемма отмечалась в работе [2], ее доказательство осуществляется прямой проверкой.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация. Если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно в группе G, то справедливы следующие утверждения:*

1) если $K \trianglelefteq G$, то в G/K множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно;

2) если M — подгруппа из G, то множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп из M является плотным в M.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация. Если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $\pi(G : H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. По определению, существует цепь $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = H$ такая, что G_i является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппой в G_{i-1} при любом $i \geq 1$. Таким образом, $G_i \supseteq G_{i-1}^{\mathfrak{F}}$ и потому

$$\pi(G_{i-1} : G_i) \subseteq \pi(G_{i-1} : G_{i-1}^{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$$

для каждого $i \geq 1$. Следовательно, $\pi(G : H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация, G — группа, у которой множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно. Справедливы следующие утверждения:*

1) если H — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, то либо $H \in \mathfrak{F}$, либо каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из H принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) если $M \subset H \subseteq G$ и $H \in \mathfrak{F}$, то M либо максимальна в H, либо $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Доказательство. Докажем сначала 1). Пусть H — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Допустим, что H обладает $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой H_1, не принадлежащей $\mathfrak{F}$. Тогда в H_1 имеется $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H_2. По условию, в G найдется такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H_2 \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. По лемме 1, $H_1^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как N $\mathfrak{F}$-субнормальна, то она содержится в $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппе, и поэтому $NG^{\mathfrak{F}} \neq G$. Значит, $H_2G^{\mathfrak{F}} \neq G$. Последнее противоречит следующему:

$$H_2G^{\mathfrak{F}} = H_2H_1^{\mathfrak{F}}G^{\mathfrak{F}} = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1H^{\mathfrak{F}}G^{\mathfrak{F}} = HG^{\mathfrak{F}} = G.$$

Докажем 2). Пусть $M \subset H \subset G$ и $H \in \mathfrak{F}$. Допустим, что M не максимальна в H. По условию, в G найдется такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N, что $M \subseteq N \subseteq H$. Так как $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $N \in \mathfrak{F}$. Поэтому M $\mathfrak{F}$-субнормальна в N. Теперь ясно, что M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная формация разрешимых групп, G — группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка, для которой лемма не верна.

Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} = G$. Тогда каждая максимальная подгруппа группы G будет $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. Пусть H некоторая неединичная силовская подгруппа группы G. Если предположить, что в H существует вторая максимальная подгруппа, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $H \supsetneqq N \supsetneqq 1$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subset G$. Противоречие. Следовательно, $|H|$ — простое число. Получили, что каждая неединичная силовская подгруппа H из G имеет простой порядок и, значит, G разрешима, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} \subset G$ и $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Если $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — разрешимая группа по условию. Если же $G^{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ разрешим по индукции. Из того, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что G разрешима. Лемма доказана.

В дальнейшем через φ будем обозначать некоторое фиксированное линейное упорядочение множества всех простых чисел.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая насыщенная S-замкнутая формация φ-дисперсивных групп, G — группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, у которой все $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $G = G_p \rtimes G_q$ — группа Шмидта.

2) $G = G_p^* \rtimes (G_q \rtimes G_p^{**})$, где G_p^* — минимальная нормальная подгруппа из G, $G_p^{**}G_q \in \mathfrak{F}$, $G_p^{**} = p$, G_q — циклическая группа и выполняется соотношение $q\varphi p$.

3) $G = G_p \rtimes G_{p'}$, где G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G, $G_{p'} \in \mathfrak{F}$ и $|\pi(G_{p'})| \leq 2$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}$ — формация разрешимых групп, то по лемме 4 G — разрешимая группа. Ввиду того, что в G все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$, по теореме 2 получаем, что $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа для некоторого простого числа p. Пусть H — некоторая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Так как $HG^{\mathfrak{F}} = G$, то H содержит некоторую холловскую подгруппу $G_{p'}$. Если $H = G_{p'}$, то $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $G_{p'} \subset H$. Покажем, что $G_{p'}$ максимальна в H. Предположим противное. Тогда согласно лемме 4 $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если для любого простого числа $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, выполняется условие $p\varphi q$, то $G_p \trianglelefteq G$. Применяя теорему 1, получаем, что $G_{p'}G_p = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Пусть π — множество всех простых делителей порядка группы G таких, что для любого $q \in \pi$, выполняется условие $q\varphi p$. Ясно, что π не пусто. Ввиду разрешимости группы G в $G_{p'}$ существует подгруппа G_π. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то $G_\pi \trianglelefteq H$. Подгруппа G_π не максимальна в H, в противном случае $G_\pi \supset G_{p'}$. Поэтому согласно лемме 4 G_π $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Применяя лемму 1 и теорему 1, получаем $K = G_\pi G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G_\pi \trianglelefteq K$ и, значит, $G_\pi \trianglelefteq G$. По индукции подгруппа $G_{p'}/G_\pi$ максимальна в H/G_π, а поэтому G_π максимальна в H. Противоречие. Итак, имеем $H = G_p^{**}G_{p'}$, где $|G_p^{**}| = p^\alpha$. Очевидно, что подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ либо совпадает с силовской p-подгруппой, либо $|G_p : G^{\mathfrak{F}}| = p^\alpha$.

Предположим вначале, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Тогда любая $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа M из G имеет вид $M = G_p \rtimes (M \cap G_{p'})$ согласно тождеству Дедекинда. Так как $M_{p'}$ не максимальна в H, то по лемме 4 $M_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в M. Применяя теорему 1, получаем $M \in \mathfrak{F}$. Итак, в группе G и все $\mathfrak{F}$-субнормальные максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$, поэтому G — группа Шмидта и выполняется утверждение 1).

Пусть теперь $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = G_p^*$ — минимальная нормальная подгруппа в G

и $G = G_p^* \leftthreetimes G_p^{**} G_{p'}$. По доказанному $G_{p'}$ не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Рассмотрим подгруппу $M = G_p^* \leftthreetimes G_{p'}$. Так как $(|G^{\mathfrak{F}}|, |G_{p'}|) = 1$, то $G_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 группы M. Любая подгруппа L из $G_{p'}$ не максимальна в $G_p^{**} G_{p'}$, поэтому по лемме 4 L $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в M. Если $G_{p'} = M_1$, то по теореме 1 M — минимальная не φ-дисперсивная группа и, значит, $|\pi(G_{p'})| = 1$. Так как $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в M, то G_p^* — минимальная нормальная подгруппа и, значит, M — группа Миллера-Морено. Следовательно, G_q — циклическая. Пусть $M_1 = P \leftthreetimes G_{p'}$. Тогда $P \trianglelefteq M$. Так как G_p^* — элементарная абелева группа и G_p^* — силовская подгруппа группы M, то по теореме Машке имеем $G_p^* = P \times P_1$ и $P_1 \trianglelefteq M$. Рассмотрим подгруппу $M_2 = G_{p'} P_1$. Если P_1 не является минимальной нормальной подгруппой в M_2, то в M_2 существует минимальная нормальная подгруппа $P_2 \subset P_1$. Так как G_p^* — абелева группа, то $P_2 \trianglelefteq M_2$. Отсюда получаем, что $M_1 P_2 \neq M$ и $M_1 \cap P_2 = 1$. Противоречие. Значит, P_1 — минимальная нормальная подгруппа группы M_2. Применяя теорему 1, получаем, что M_2 — минимальная не φ-дисперсивная группа. Так как упорядочение φ фиксированное, то M_2 — группа Миллера-Морено и $G_{p'} = G_q$ — циклическая группа. Предположим теперь, что $p\varphi q$. Тогда $G_p^{**} \trianglelefteq G_p^{**} G_q$, $G_p \trianglelefteq G$ и $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно $q\varphi p$. Так как H_q максимальна в H и $H_q \trianglelefteq H$, то $|H_p^{**}| = p$ и выполняется утверждение 2).

Пусть $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$. Покажем, что $|\pi(G_{p'})| \leq 2$. Если в $G_{p'}$ все подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то по теореме 1 G — минимальная не φ-дисперсивная группа и $|\pi(G_{p'})| = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда в $G_{p'}$ существует максимальная подгруппа K, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в G. Тогда, ввиду леммы 4, любая подгруппа из K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Рассмотрим подгруппу $M = G_p K = G_p \leftthreetimes M_{p'}$. Так же, как и в случае, когда $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$, можно показать, что $|\pi(M_{p'})| = 1$. Из разрешимости группы $G_{p'}$ и того, что M'_p максимальна в $G_{p'}$, следует $|\pi(G_{p'})| \leq 2$, и утверждение 3) доказано. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая насыщенная S-замкнутая формация φ-дисперсивных групп, G — группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Тогда любая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G либо φ-дисперсивна, либо является минимальной не φ-дисперсивной группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой.*

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка, для которой лемма не верна. Тогда в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа H, не являющаяся φ-дисперсивной или минимальной не φ-дисперсивной группой. Применяя леммы 4 и 6, получаем, что H — группа вида 1) – 3) из леммы 1.

1. Пусть $H = H_p \leftthreetimes H_q$ — группа вида 1) из леммы 6. Тогда H_q не максимальна в H. По условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. Поэтому $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $H_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а, значит, и в H. Ввиду теоремы 1 $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

2. Пусть $H = H_p^* \leftthreetimes H_p^{**} H_q$ — группа вида 2) из леммы 6. Тогда H_q не $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, а значит, и в G. Если H_q не максимальна в $N_G(H_q)$, то по условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq N_G(H_q)$. Так как $H_q \trianglelefteq N$ и N разрешима, то H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в N, а значит, и в G. Противоречие.

Предположим, что $H_p^{**} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H_q не максимальна в H, то по условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $H_q \subseteq N \subseteq H$. Отсюда получаем, что $H_q G^{\mathfrak{F}} \subseteq N G^{\mathfrak{F}} \neq G$. Учитывая, что $H_p^* \subset G^{\mathfrak{F}}$, имеем $H_q G^{\mathfrak{F}} = H_q H_p^* H_p^{**} G^{\mathfrak{F}} = H G^{\mathfrak{F}} = G$. Противоречие. Значит, $H_p^{**} \not\subset G^{\mathfrak{F}}$. Так как $H_p^{**} H_q G^{\mathfrak{F}} = G$ и $H_q G^{\mathfrak{F}} \neq G$, то подгруппа $M = H_q G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной в G и $N G^{\mathfrak{F}} = M$. Из леммы 1 получаем, что N $\mathfrak{F}$-субнормальна в M. Из последнего следует, что $M^{\mathfrak{F}} \subset$

$\subset G^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа H_q самонормализуема в M, в противном случае H_q не максимальна в $N_G(H_q)$.

Предположим, что $|G:H| = p^{\alpha}$. Тогда $|\pi(G)| = 2$ и $H_q = G_q$. Учитывая, что H_q — циклическая группа, самонормализуемая в M, получаем $M = M_p \leftthreetimes H_q$. Так как $M_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $G/M_p = HM_p/M_p = H_p^{**}H_qM_p/M_p \in \mathfrak{F}$, то $M_p = G^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа H_q содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе L группы M. Если $L \in \mathfrak{F}$, то либо $H_q = L$ и $M^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$, либо, ввиду $q\varphi p$ имеем $L = H_q \leftthreetimes P$ и H_q не самонормализуема в M. Следовательно, $L = L_p \leftthreetimes H_q$ и по индукции L — группа Миллера-Морено. Тогда $L_p \subset M^{\mathfrak{F}}$ и $M^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Итак, $|G:H| = r^{\alpha}$ и $r \neq p$. Если $r = q$, то H_q не максимальна в $N_G(H_q)$. Ввиду теоремы 2, $|\pi(G^{\mathfrak{F}})| = 2$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}} = G_rG_p^*$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда либо $R = G_r$, либо $R = H_p^*$. Если $H_p^* \trianglelefteq G$, то $(G/H_p^*)^{\mathfrak{F}}$ — r-группа. Значит, $G_r \trianglelefteq G$. Рассмотрим подгруппу $M = H_qG^{\mathfrak{F}} = H_qH_p^*G_r$. Тогда $M = M_{q'} \leftthreetimes M_q$. Так как $G^{\mathfrak{F}} = G_rG_p^* = M_{q'}$ и по доказанному $M^{\mathfrak{F}} \subset G^{\mathfrak{F}}$, то $M^{\mathfrak{F}} \subset M_{q'}$. Так как $M/G_r \notin \mathfrak{F}$, то $G_r \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа M_1 группы M, содержащая H_qG_r. По индукции M_1 либо бипримарная группа Миллера-Морено, либо $M_1 \in \mathfrak{F}$. Если $H_qG_r \subset M_1$, то $|\pi(M_1)| = 3$ и значит, $M_1 \in \mathfrak{F}$. Так как H_q не максимальна в M_1, то по лемме 4 H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Противоречие. Значит, $M_1 = H_qG_r$. Если $M_1 \in \mathfrak{F}$, то учитывая, что H_q самонормализуема в M, имеем $M_1 = H_q \rightthreetimes G_r$ и выполняется соотношение $r\varphi q$. Рассмотрим группу $H_qH_p^{**}G_r = M_2$. Здесь $G_r \trianglelefteq M_2$, $G_rH_q \trianglelefteq M_2$ и выполняется соотношение $r\varphi q\varphi p$. Значит, $M_2 \in \mathfrak{F}$. Так как H_q не максимальна в M_2, то по лемме 4 H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда $M_1 = H_q \rightthreetimes G_r$ — группа Миллера-Морено. Отсюда следует, что $G_r \subset M^{\mathfrak{F}}$ и $M^{\mathfrak{F}} = G_rH_p^*$. Противоречие.

3. Пусть $H = H_p \leftthreetimes H_{p'}$ — группа вида 3) из леммы 6. Тогда $H^{\mathfrak{F}} = H_p$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Если каждая максимальная подгруппа из H_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, то H — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Значит, в H_1 найдется максимальная подгруппа K, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в H. Очевидно, что $(|H^{\mathfrak{F}}|, |K|) = 1$. Рассмотрим подгруппу $L = H^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes K$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе L_1 из L. Так как L_1 не максимальна в H, то по условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $L_1 \subseteq N \subseteq H$. Так как $N \supset K$ и $N \supset H^{\mathfrak{F}}$, то $N = L$. Рассмотрим подгруппу $M = KG^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. По индукции M_1 либо принадлежит $\mathfrak{F}$, либо является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Ясно, что K — максимальная в M_1 подгруппа. В противном случае по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа A такая, что $K \subset A \subset M_1$, и следовательно, K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

3.1. $|G:H| = p^{\alpha}$. Тогда $H_p \trianglelefteq G$. По доказанному выше L $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и $L = KH^{\mathfrak{F}} \subset KG^{\mathfrak{F}}$. Тогда $KM^{\mathfrak{F}} \subseteq LM^{\mathfrak{F}} \neq M$. Покажем, что $KG_p = M$. Действительно, если $KG_p \subset M$, то из того, что $K \subset M_{p'} \subset G_{p'}$б следует, что K не максимальна в $G_{p'}$. Противоречие. Так как $G_p \subset M$ и $KG_p = M$, то $G_p \not\subseteq M^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что H_p дополняема в M. Если $H_p \cap M_1 \neq 1$, то из того, что K максимальна в M_1, следует, что $K(H_p \cap M_1) = M_1$. С другой стороны, так как M_1 максимальна в M, то либо $M_1H_p = M_1$, либо $M_1H_p = M$. Из того, что $H_p \subset G_p$, следует $M_1H_p = M_1$. Получили, что $H_p \subset M_1$. Тогда $K(M_1 \cap H_p) = KH_p = M_1$ — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная в M подгруппа. Это противоречит тому, что $L = KH_p$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Следовательно, $M_1 \cap H_p = 1$ и $M_1H_p = M$. Так как H_p — абелева, то по теореме 5 H_p имеет дополнение S в G. Так как K не максимальна в S, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N_1 такая, что $K \subseteq N_1 \subseteq S$. Из того, что $KS^{\mathfrak{F}} \subseteq N_1S^{\mathfrak{F}} \subseteq KG^{\mathfrak{F}}$ и $KS^{\mathfrak{F}} \cap H_p = 1$, следует, что $N_1 \subseteq M_1$. Так как M_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа в G, то $N_1 \neq M_1$.

Это значит, что $N_1 \in \mathfrak{F}$ и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Противоречие.

3.2 $|G : H| = q^{\alpha}$. Тогда $H_p = G_p$ — силовская p-подгруппа группы G. Рассмотрим p'-холлову подгруппу $G_{p'}$ группы G, содержащую $H_{p'}$. Так как $H_p \subset G^{\mathfrak{F}}$, то $G_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе R группы G. Если $p \in \pi(R)$, то $H_{p'}$ входит в $\mathfrak{F}$ и не максимальна в R. Тогда K будет $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Значит, $G_{p'} = R$ максимальна в G. Ввиду теоремы 2 $G_{p'}^{\mathfrak{F}}$ — q-группа. Если $q \in \pi(H_{p'})$, то согласно доказанному выше, лемма верна. Значит, $G_q = G_{p'}^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в $G_{p'}$. Подгруппа KG_q максимальна в $G_{p'}$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе S группы KG_q. Так как S не максимальна в $G_{p'}$, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N_1 такая, что $S \subset N_1 \subset G_{p'}$. Так как $KG_q \subseteq N_1G_q \subset G_{p'}$, то $N_1G_q = KG_q$. Тогда $N_1 \subseteq KG_q$ и подгруппа KG_q будет содержаться в подгруппе M_1 группы M. Если $N_1 \neq M_1$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если же $N_1 = M_1$, то получаем противоречие с тем, что M_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы M. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная φ-дисперсивная формация, G — группа, в которой множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно, $\pi(G) \nsubseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда G — группа одного из следующих типов:*

1) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1q$, $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) $\pi(G) = \{p_1, q\}$, $|G| = p_1q^2$, G_{p_1} максимальна в G, $p_1 \in \pi(\mathfrak{F})$, $q \notin \pi(\mathfrak{F})$;

3) $\pi(G) = \{q\}$, $|G| \leq q^2$, $q \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. По лемме 5, G разрешима. Так как $\pi(G) \nsubseteq \pi(\mathfrak{F})$, то ясно, что $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Положим $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и рассмотрим холлову π-подгруппу G_π группы G. Если единичная подгруппа не является максимальной в G_π, то существует $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $1 \subseteq N \subseteq G_\pi$. По лемме 3, $\pi(G : N) \subseteq \pi$ и, значит, G — π-группа. Получили противоречие. Таким образом, $|G_\pi|$ равен либо 1, либо является простым числом.

Рассмотрим теперь холлову π'-подгруппу $G_{\pi'}$ группы G. Пусть H — нормальная максимальная подгруппа из $G_{\pi'}$. Пусть $q = |G_{\pi'} : H|$, $q \in \pi'$. Если 1 не максимальна в H, то между 1 и H можно вставить $\mathfrak{F}$-субнормальную подгруппу, индекс которой по лемме 3 является π-числом. Понятно, что этот индекс делится на $q \in \pi'$. Получаем противоречие. Значит, $|G_{\pi'}|$ равен либо квадрату простого числа, либо простому числу, либо произведению двух различных простых чисел.

Если $|G_\pi| = 1$, то ясно, что G либо типа 1), либо типа 3). Пусть $|G_\pi| = p_1$ — простое число. Если $|G_{\pi'}|$ — простое число, то G — группа типа 1). Пусть $|G_{\pi'}| = qq_1$, где q, q_1 — простые числа. Предположим, что в G существует подгруппа T порядка p_1q. Так как 1 не максимальна в T, то между 1 и T существует по условию $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, индекс которой по лемме 3 является π-числом. Но этот индекс делится и на $q_1 \in \pi'$. Остается принять, что G_p — максимальная подгруппа группы G. Но тогда $q = q_1$ и G — группа типа 2). Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая S-замкнутая насыщенная формация φ-дисперсивных групп, G — не φ-дисперсивная группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда G — группа одного из следующих типов:*

1) G — $\{p, q\}$-группа Шмидта, $p\varphi q$, $|\Phi(G_p)| \leq p$;

2) $G = G_p \rightthreetimes G_q$, $p\varphi q$, G_q нециклическая, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $C_G(G_p)$ является нильпотентной максимальной подгруппой в G, а любая другая максимальная подгруппа из G, содержащая G_p, является группой Миллера-Морено;

3) $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = G_p \rightthreetimes G_q$, $p\varphi q$, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, $G_q = N_G(G_q)$, в G имеется ниль-

потентная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа, а также $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа, являющаяся группой Миллера-Морено.

4) $\pi(G) = \{p, q\}$, $p\varphi q$, $G = P_1 \leftthreetimes (G_q \leftthreetimes P_2)$, где p и q — различные простые числа, $P_1P_2 = G_p$, $|P_2| = p$, $\Phi(G_q) \trianglelefteq G$, G_q циклическая, P_1 — минимальная нормальная подгруппа в G, имеется точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\Phi(G_q)$;

5) $\pi(G) = \{p, q\}$, $p\varphi q$, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ — минимальная нормальная подгруппа в G, G_q является циклической максимальной подгруппой в G, $G_p\Phi(G_q)$ — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), $\Phi(G) = \Phi(\Phi(G_q))$ и $G/\Phi(G)$ — группа Фробениуса;

6) $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $p\varphi q$, $p\varphi r$, и если G_p, G_q, G_r — силовская база группы G, то $G_pG_r \trianglelefteq G$, $\Phi(G_q) \trianglelefteq G$, одна из подгрупп G_p, G_r нормальна в G, G_q максимальна в G_qG_r, имеется точно три класса максимальных сопряженных подгрупп в G, представителями которых являются $G_pG_q = G_p \leftthreetimes G_q$ — группа Миллера-Морено, G_qG_r и $G_pG_r\Phi(G_q)$;

7) $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $p\varphi q\varphi r$, где p, q, r — различные простые числа, $G = G_p \leftthreetimes (G_r \leftthreetimes G_q)$ — группа порядка $p^\alpha qr$, не являющаяся группой Фробениуса и имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_pG_q — группа типа 4), G_rG_q;

8) $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $p\varphi q$, $p\varphi r$, где p, q, r — различные простые числа, $G = G_p \leftthreetimes (G_r \times G_q)$ — группа порядка $p^\alpha qr$, имеющая точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются: G_pG_r — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_pG_q — либо группа Миллера-Морено, либо группа типа 3), G_rG_q.

9) $\pi(G) = \{p, q, r\}$, $r\varphi p\varphi q$, где p, q, r — различные простые числа, G — r-нильпотентна, $|G_r| = r$, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$, в G существуют точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются G_pG_q — либо группа Шмидта, либо группа типа 3) из данной теоремы, $G_rG_q \in \mathfrak{F}$, $G_rG_pQ \in \mathfrak{F}$, где Q — максимальная подгруппа из G_q.

Доказательство. Пусть G не φ-дисперсивна. По лемме 5 группа G разрешима. Применяя леммы 6 и 7, получаем, что $|\pi(G)| \leq 3$. Доказательство разобьем на два случая: $|\pi(G)| = 2$ и $|\pi(G)| = 3$.

Случай 1. $\pi(G) = \{p, q\}$. Ясно, что группа G в этом случае будет φ-дисперсивна тогда и только тогда, когда она будет p-нильпотентна, где p является φ-минимальным простым делителем порядка группы G..

Случай 1.1. Допустим, что G обладает не φ-дисперсивной $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой H. По лемме 7, H — бипримарная группа Миллера-Морено. Заметим еще, что $H = H_p \leftthreetimes H_q$, где $H_p = H^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Тогда $|G : H|$ есть степень либо простого p, либо q. Пусть $|G : H| = q^\beta$. Пусть G_q —силовская q-подгруппа из G, содержащая H_q. Если H_q не максимальна в G_q, то $H_q \subseteq N \subseteq G_q$, где N — некоторая $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа. Тогда H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в H (напомним, что из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $G_q \in \mathfrak{F}$). Но тогда по теореме 1, $H \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, $|G_q : H_q| = q$ и $G^{\mathfrak{F}}G_q = G$. Пусть L — максимальная подгруппа из G, содержащая G_q. Так как L $\mathfrak{F}$-абнормальна, то, по лемме 7, L либо φ-дисперсивна, либо является группой Миллера-Морено. Но H_p — минимальная нормальная подгруппа в H, поэтому ясно, что L не может быть p-замкнутой группой. Таким образом, L p-нильпотентна. Если $L \neq G_q$, то из $L \supset G_q \supset H_q$ и из условия вытекает, что существует $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $L \supseteq N \supseteq H_q$. Так как $L \neq G$, то $NG^{\mathfrak{F}} \neq G$, что противоречит равенству $G_qG^{\mathfrak{F}} = G$. Итак, мы должны рассмотреть только случай $L = G_q$. Подгруппа H_q является циклической и максимальна в G_q. Поэтому очевидно, что максимальная подгруппа Q из H_q нормальна в G. Пусть S/Q — минимальная нормальная подгруппа в G/Q. Так как H_pQ/Q — минимальная нормальная подгруппа в H/Q, то S/Q — q-группа, не входящая в H/Q, а значит, $|S/Q| = q$. Так как G_q/Q максимальна и не нормальна в G/Q, то $C_{G/Q}(S/Q) = G/Q$. Ясно теперь, что $H_pQ/Q \trianglelefteq G/Q$, а значит, H_pQ нормальна в G. Таким образом, получается, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_pQ$, что противоречит равенству $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Итак, теперь надо рассмотреть случай $|G : H| = p^{\alpha}$, т.е. H_q — силовская q-подгруппа в G, а H_p — минимальная нормальная подгруппа в G. Допустим, что силовская p-подгруппа P из $N_G(H_q)$ не равна 1. Так как $P \not\subseteq H_p$, то $H_pN_G(H_q) = G$. Тогда G/H_p p-нильпотентна, а значит, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ содержится в H_p. Но это противоречит равенству $G = HG^{\mathfrak{F}}$. Итак, $H_q = G_q = N_G(G_q)$. По теореме Бернсайда, G q-нильпотентна и, значит, $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская p-подгруппа в G. Максимальная подгруппа Q из H_q не максимальна в H, поэтому $Q \subseteq N \subset H$ для некоторой $\mathfrak{F}$-субнормальной в G подгруппы N. Так как N — абелева $\pi(\mathfrak{F})$-группа, то $N \in \mathfrak{F}$. Значит, Q оказывается $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. По теореме 1, $QG_p \in \mathfrak{F}$. Мы получаем, что G — группа типа 3).

Случай 1.2. Теперь будем полагать, что каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G φ-дисперсивна. Тогда G — группа одного из типов 1)-3) леммы 6. Если G — группа типа 1), то доказывать нечего. Пусть G — группа типа 2), т.е. $\pi(G) = \{p, q\}$, $G = P_1 \leftthreetimes (G_q \leftthreetimes P_2)$, где $P_1P_2 = G_p$, $|P_2| = p$, $\varphi(G_q) \trianglelefteq G$, G_q циклическая, а P_1 — минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим, что G q-сверхразрешима. Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если M содержит G_q^x и не содержит P_1, то $M = N_G(G_q^x)$. Если M содержит G_q^x и P_1, то $M = P_1G_q^x$. А если M содержит G_p^x, то $|G : M| = q$ и $M = G_p^x\varphi(G_q)$. Таким образом, G имеет точно три класса сопряженных максимальных подгрупп, представителями которых являются P_1G_q, P_2G_q и $G_p\varphi(G_q)$. Значит, в этом случае группа G — группа типа 4). Пусть G — группа типа 3) леммы 6 и G_p — минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть $G = G_pG_q$. Очевидно, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что G_p имеет максимальную подгруппу Q, являющуюся $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. По теореме 1, $QG_p \in \mathfrak{F}$. Очевидно, $Q \trianglelefteq G$. Ясно, что любая максимальная подгруппа из G_p, отличная от Q, не является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Если G_p циклическая, то G — группа типа 1). Поэтому считаем, что G_p нециклическая. Пусть Q_1 — максимальная подгруппа из G_q, отличная от Q. Рассмотрим подгруппу $M = G_pQ_1$, являющуюся $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Так как Q_1 не $\mathfrak{F}$-субнормальна, то $M \notin \mathfrak{F}$. Пусть M^* — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из M. Так как $M^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, то $|M : M^*|$ — степень p, т.е. Q_1 содержится в подгруппе, сопряженной с M^* в M. Будем считать, что $M^* \supseteq Q_1$. Силовская p-подгруппа M_p^* из M^* нормальна в M^* и в M_p^*Q, т.е. M_p^* нормальна в G. Но G_p — минимальная нормальная подгруппа. Поэтому M^* — q-группа, т.е. $M^* = Q_1$ максимальна в M. По лемме 4, каждая собственная подгруппа из Q_1 будет $\mathfrak{F}$-субнормальной в G (мы применяем утверждение 2) леммы 4 для случая $H = G_q$). Теперь по лемме 5, M является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, откуда следует, что M — группа Миллера-Морено, т.е. G — группа типа 2). Предположим теперь, что любая максимальная подгруппа из G_q не является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Пусть $M = G_pQ$ — максимальная подгруппа из G, причем $Q \subset G_q$. Подгруппа M не принадлежит $\mathfrak{F}$, иначе Q была бы $\mathfrak{F}$-субнормальной. Если Q максимальна в M, то M — группа Миллера-Морено. Если Q не максимальна в M, то Q строго содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Подгруппа M_1 не p-нильпотентна, так как в противном случае $N_G(Q) \supseteq \langle G_q, M_1 \rangle = G$, что противоречит тому, что Q не $\mathfrak{F}$-субнормальна. Итак,

$M = G_p\, Q \notin \mathfrak{F}$, в M существует не p-нильпотентная $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа, $\pi(M) = \{p, q\} \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Но этот случай уже рассмотрен, т.е. M — группа типа 3) нашей теоремы. Таким образом, максимальная подгруппа Q_1 из Q нормальна в G. Рассмотрим группу G/Q_1, ее порядок равен $|G_p| \cdot q^2$. Понятно, что если A_1/Q_1 и A_2/Q_2 — две различные подгруппы из G/Q, то $A_1 \cap A_2 \trianglelefteq G$, и значит, $A_1 \cap A_2 = Q$, так как каждая максимальная подгруппа из G_q не нормальна в G. Следовательно, G/Q_1 — группа Фробениуса с циклической подгруппой G_q/Q_1 порядка q^2. Так как $Q_1 \subseteq \varphi(G_q)$, то получается, что G_q циклическая. Так как $M = G_pQ$ — единственная максимальная подгруппа, содержащая G_p, то $Q_1 = \varphi(G)$. Итак, G — группа типа 5).

Случай 2. $\pi(G) = \{p, q, r\}$. Доказательство данного случая разобьем на два случая: G p-нильпотентна и G не p-нильпотентна для φ-минимального простого делителя p порядка группы G.

Случай 2.1. Предположим, что G не p-нильпотентна, где p — φ-минимальный простой делитель порядка группы G.

Допустим, что G обладает не φ-дисперсивной $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой H. По лемме 7, H — бипримарная группа Миллера-Морено. Тогда ясно, что H — холлова подгруппа в G; будем полагать, что $|H|$ делится на p и q. Пусть G_p, G_q и G_r — попарно перестановочные силовские подгруппы из G такие, что $H = G_pG_q$. Так как $G_p = H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $HG^{\mathfrak{F}} = G$, то $G_pG_r = G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим максимальную подгруппу M из G, содержащую G_qG_r. Если G_q не максимальна в M, то ввиду условия $G_q \subseteq N \subseteq M$, где N — $\mathfrak{F}$-субнормальная собственная подгруппа группы G, а значит, $NG^{\mathfrak{F}} \neq G$, что противоречит равенству $G_qG^{\mathfrak{F}} = G$. Значит, G_q максимальна в M и поэтому $M = G_qG_r$, где $G_r \trianglelefteq M$, так как $G_r = G^{\mathfrak{F}} \cap M$. Понятно, что содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$ минимальная нормальная подгруппа группы G совпадает либо с G_p, либо с G_r. Пусть T — максимальная подгруппа из G, содержащая G_pG_r. Так как H — группа Миллера-Морено, то холлова $\{p, q\}$-подгруппа из T нильпотентна. Таким образом, если $G_r \trianglelefteq G$, то T p-нильпотентна и $|G : T| = q$. Если G_r не максимальна в G_qG_r, то существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $G_r \subseteq N \subseteq G_qG_r$. Тогда G_r $\mathfrak{H}$-субнормальна в G, где $\mathfrak{H}$ — формация всех p-нильпотентных групп, а G_pG_r p-нильпотентна по теореме 1, т.е. $G_r \trianglelefteq G$. Следовательно, если G_r не нормальна в G, то $|G_p| = q$, $T = G_pG_r$ максимальна в G и $G_p \trianglelefteq G$. В любом случае силовская q-группа T_q из T нормальна в G. Пусть R — еще одна максимальная подгруппа индекса q. Тогда $R_q = T_q$, так как G_q циклическая. Понятно теперь, что T и R сопряжены. Итак G — группа типа 6).

Теперь будем полагать, что каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G φ-дисперсивна. По лемме 6, G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если собственная подгруппа S из $G_{p'}$ не является максимальной в $G_{p'}$, то по условию существует $\mathfrak{F}$-субнормальная в G p'-группа N, содержащая S. По теореме 1, $NG_p \in \mathfrak{F}$, а значит, $NG_p = N \times G_p$. Итак, каждая собственная не максимальная подгруппа из $G_{p'}$ поэлементно перестановочна с G_p. Так как G не p-нильпотентна, то ясно, что силовская q-подгруппа G_p и силовская r-подгруппа G_r из $G_{p'}$ не могут одновременно быть не максимальными в $G_{p'}$, т.е. либо обе они максимальны в $G_{p'}$, либо только одна из них максимальна в $G_{p'}$. Эти два случая мы рассмотрим.

Случай 2.1.1. Пусть G_p максимальна в $G_{p'}$. Тогда, как отмечалось, G_pG_r нильпотентна, а G_pG_q ненильпотентна. Пусть Q — произвольная максимальная подгруппа из G_q. Тогда Q не максимальна в $G_{p'}$ и по условию содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-субнормальной p'-подгруппе, которая по теореме 1 будет поэлементно перестановочна с G_p. Отсюда следует, что G_pG_q — группа Миллера-Морено. Если G_q нормальна в $G_{p'}$, то $|G_r| = r$. Пусть M — максимальная подгруппа из $G_{p'}$, содержащая G_r. Каждая собственная подгруппа из M, как отмечалось, поэлементно перестановочна с G_p. Значит, каждая собственная подгруппа из G_pM будет p-нильпотентна. Но $G_r \neq M$. Поэтому G_pM не может быть группой Шмидта. Значит, G_pM p-нильпотентна и $C_G(G_p) = G_pM = G_p \times M \trianglelefteq G$. Значит, $M \trianglelefteq G$. Получается, что каждая максимальная подгруппа из $G_{p'}$ нормальна в $G_{p'}$, т.е. $G_{p'}$ нильпотентна. Итак, если G_q нормальна в $G_{p'}$, то G — группа типа 6).

Пусть теперь G_q не нормальна в $G_{p'}$. По теореме Бернсайда, $G_{p'}$ q-нильпотентна, т.е. $G_r \trianglelefteq G_{p'}$. Учитывая, что G_pG_r нильпотентна, получаем, что G_r нормальна в G, т.е. G оказывается группой типа 6).

Случай 2.1.2. Пусть теперь подгруппы G_q и G_r являются максимальными в G. Тогда одна из них нормальна в $G_{p'}$. Пусть $G_r \trianglelefteq G_{p'}$. Тогда $|G_q| = q$. В этом случае G_pG_q, G_pG_r и G_qG_r — максимальные подгруппы в G. Если одна из подгрупп G_pG_q, G_pG_r нильпотентна, то G — группа типа 6). Предположим, что G_pG_q и G_pG_r не нильпотентны. Поскольку каждая собственная подгруппа из G_r поэлементно перестановочна с G_p, а подгруппа G_pG_r ненильпотентна, то G_r является циклической. Но тогда $|G_r| = r$, так как G_q максимальна в сверхразрешимой подгруппе G_qG_r. Рассмотрим подгруппу G_pG_r. Так как $N_G(G_r) = G_{p'}$, то $N_{G_pG_r}(G_r) = G_r$. Если G_r максимальна в G_pG_r, то G_pG_r — группа Миллера-Морено. Пусть G_r не максимальна в G_pG_r. Так как $G_p \trianglelefteq G_pG_r$ и $G_r \in \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы G_pG_r является неединичной p-группой. Ясно, что G_r содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M из G_pG_r, причем $M \notin \mathfrak{F}$, так как G_r самонормализуема в G_pG_r. Мы видим, что G_pG_r — группа типа 3).

Возможны два случая: G_q нормальна в $G_{p'}$ и G_q ненормальна в $G_{p'}$.

Пусть G_q не нормальна в $G_{p'}$. Если $G_q = N_G(G_q)$, то G — группа Фробениуса с нильпотентной нормальной подгруппой G_pG_r, что противоречит нашему допущению. Пусть $N_G(G_q) = P_1 \times Q$, где $P_1 \neq 1$, $P_1 \trianglelefteq N_G(G_q)$. Так как G_p элементарная абелева, то существует такая p-подгруппа P, что $G_pG_q = P \leftthreetimes N_G(G_q)$. Мы видим, что G_pG_q — группа типа 4), а сама G — группа типа 7).

Предположим теперь, что G_q нормальна в $G_{p'}$, т.е. G_qG_r нильпотентна и имеет порядок qr. Очевидно, что в этом случае G является группой Фробениуса с ядром G_p, а G_pG_r — группа типа 3), либо группа Миллера-Морено. Рассмотрим G_pG_q. Если G_q максимальна в G_pG_q, то G_pG_q — группа Миллера-Морено. Пусть G_q не максимальна в G_pG_q. Так как $(G_pG_q)^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, то G_q содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H из G_pG_q, причем $H \notin \mathfrak{F}$, так как G_q самонормализуема в G_pG_q. Получается, что G_pG_q — группа типа 3). В этом случае G оказывается группой типа 8).

Случай 2.2. Будем полагать далее, что r является φ-минимальным простым делителем порядка группы G. Пусть теперь G r-нильпотентна. Из того, что G не φ-дисперсивная группа, следует, что в ней существует нормальная холлова π-подгруппа H примарного индекса, не являющаяся φ-дисперсивной. По доказанному H — группа вида 1)-5) из данной теоремы.

Случай 2.2.1. Пусть H — группа Шмидта, $|\Phi(H_p)| \leq p$. В этом случае $G = G_r \leftthreetimes H$. Рассмотрим p'-холлову подгруппу $G_{p'}$ группы G. Из того, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и $H_{p'} = H_q \trianglelefteq G_{p'}$, следует, что $G_{p'} \in \mathfrak{F}$. Если H_q не максимальна в $G_{p'}$, то по лемме 4 H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда по теореме 1 $H = H_pH_q \in \mathfrak{F}$. Следовательно, H_q максимальна в $G_{p'}$ и $G_{p'} = H_q \leftthreetimes G_r = G_q \leftthreetimes G_r$. Из $H_q \trianglelefteq G_{p'}$ следует равенство $|G_r| = r$. Отсюда следует, что H максимальна в G. Так как $H \trianglelefteq G$, $G_p \trianglelefteq H$, то $H_p = G_p \trianglelefteq G$. Покажем, что $G_{p'} = G_rG_q$ максимальна в G. Предположим противное. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G, содержащая $G_{p'}$. Значит, $M = G_{p'}P$, где P — некоторая неединичная подгруппа из G_p. Тогда p'-холлова подгруппа G_qP группы M нормальна в M и является собственной в H. Поэтому M φ-дисперсивна. Так как G_q не максимальна в M, то по лемме 4 G_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Отсюда, по теореме 1, $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G_{p'} = G_rG_q$ максимальна в G. Если G_r максимальна в G_rG_q, то G — группа типа 9). Предположим, что G_r не максимальна в G_rG_q. Тогда в G существует $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа $K = (G_rQ) \leftthreetimes G_p$, где G_rQ — максимальная подгруппа из G_rG_q. Так как $G_pQ \subset H$, то $G_pQ = G_p \times Q$. Значит, $K \in \mathfrak{F}$ и G — группа типа 9).

Случай 2.2.2. Предположим, что $H = H_p \rightthreetimes H_q$ — группа вида 2), либо вида 5). В этом случае $H^{\mathfrak{F}} = H_p$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Так как G r-нильпотентна для φ-минимального простого делителя r порядка группы G, то p'-холлова подгруппа $G_{p'}$ группы G φ-дисперсивна. Тогда каждая собственная подгруппа из H_q будет не максимальна в $G_{p'}$ и по лемме 4 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Но в этом случае, по лемме 5, H — группа Шмидта. Противоречие.

Случай 2.2.3. Предположим, что $H = H_p \rightthreetimes H_q$ — группа типа 3). В этом случае G_p — циклическая и $H_pQ = H_p \times Q$, где Q — максимальная подгруппа из H_q. Холлова p'-подгруппа G_rH_q φ-дисперсивна. Если H_q не максимальна в G_rH_q, то, применяя лемму 4 и теорему 1, получаем $H \in \mathfrak{F}$. Значит, $H_q = G_q$ максимальна в G_rG_q и $|G_r| = r$. Следовательно, H максимальна в G. Так как $H_p = H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $G/H_p \in \mathfrak{F}$, то $H_p = G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что G_rG_q не максимальна в G. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа $M = G_rG_qP$, где P — некоторая неединичная подгруппа из G_p. По лемме 4 в M все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. По теореме 2 $M^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Подгруппа G_sG_q содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 группы M. Если $G_rG_q \subset M_1$, то G_q не максимальна в M_1 и, по лемме 4, $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Отсюда, по теореме 1, $H = G_p \rightthreetimes G_q \in \mathfrak{F}$. Значит, G_rG_q максимальна в M и P — минимальная нормальная подгруппа в M. Получили, что $M^{\mathfrak{F}} = P$. Так как G_q не максимальна в M, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $G_q \subset N \subset M$. Тогда $G_qM^{\mathfrak{F}} \subseteq NM^{\mathfrak{F}} \neq M$. Так как $G_qM^{\mathfrak{F}}$ максимальна в M, то $N \subseteq G_qM^{\mathfrak{F}}$. Это значит, что $N \subset H$ и $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Но тогда $G_qG_p = G_qH^{\mathfrak{F}} \subseteq NH^{\mathfrak{F}} \neq H$. Противоречие. Значит, G_rG_q максимальна в G. Если G_r максимальна в G_rG_q, то G — группа типа 9) из данной теоремы. Предположим, что G_r не максимальна в G_rG_q. Тогда в G существует максимальная подгруппа $K = G_rG_pQ$, где Q — максимальная подгруппа из G_q. Так как по условию $G_pQ = G_p \times Q$, то K φ-дисперсивна. Итак, G — группа типа 9)

Случай 2.2.4. Предположим, что $H = P_1 \rightthreetimes (H_q \rightthreetimes P_2)$ — группа типа 4). В этом случае $G_p = P_1P_2$. Так как $H^{\mathfrak{F}} = P_1$, то $P_1 \trianglelefteq G$. По условию P_1 абелева и дополняема в силовской подгруппе G_p. По теореме 5 P_1 дополняема в G. Тогда в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа $M = G_r \leftthreetimes (H_q \rightthreetimes P_2)$. Там как H_q не максимальна в M, то по лемме 4 H_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По теореме 1 $H_qP_1 \in \mathfrak{F}$. Но тогда $H_q \trianglelefteq H$. Противоречие. Теорема доказана.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная насыщенная S-замкнутая формация, G — φ-дисперсивная группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, у которой все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $G_{\pi(G^{\mathfrak{F}})'}$ — максимальная подгруппа в G;

2) $G_{\pi(G^{\mathfrak{F}})'}$ — максимальна в $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе из G.

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка, для которой лемма не верна. По теореме 2 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Пусть H — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Тогда H содержит некоторую p'-холлову подгруппу $G_{p'}$. По нашему предположению $G_{p'}$ не максимальна в H. Тогда по лемме 4 $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Если p — φ-максимальный простой делитель $|G|$, то подгруппа G_p нормальна в G. Тогда по теореме 1 $G = G_pG_{p'} \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Пусть π — множество простых делителей порядка группы G, больших p при упорядочении φ. По доказанному выше множество π не пусто. Тогда $G_\pi \trianglelefteq G$. По индукции $G_{p'}/G_\pi$ максимальна в H/G_π. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная S-замкнутая формация, G — группа с нормальной силовской p-подгруппой G_p, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $G \notin \mathfrak{F}$;

2) холлова p'-подгруппа $G_{p'}$-группы G является максимальной в G и принадлежит $\mathfrak{F}$;

3) любая собственная подгруппа из $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Тогда G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

Доказательство. Из условия прямо следует, что G_p совпадает с $G^{\mathfrak{F}}$ и является минимальной нормальной подгруппой в G. Понятно, что каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G сопряжена с $G_{p'}$ и поэтому принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть L — произвольная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа из G. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}(L \cap G_{p'})$. Так как $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $L \cap G_{p'} \in \mathfrak{F}$. Подгруппа $L \cap G_{p'}$ является собственной в $G_{p'}$ и по условию $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По теореме 1, $L = G^{\mathfrak{F}}(L \cap G_{p'}) \in \mathfrak{F}$. Итак, каждая максимальная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная насыщенная S-замкнутая формация, G — φ-дисперсивная группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Тогда любая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G либо принадлежат $\mathfrak{F}$, либо является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой.*

Доказательство. Предположим, что утверждения леммы не выполняются и в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H не удовлетворяющая утверждениям леммы. Ввиду леммы 4 и теоремы 2 $H = H^{\mathfrak{F}}H_1$, где H_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из H, $H^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, $H_1 \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что H_1 содержит некоторую p'-холлову подгруппу $H_{p'}$ из H.

1. Предположим, что $H_1 \neq H_{p'}$. Если $H_p = H^{\mathfrak{F}}$, то каждая $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы H будет иметь вид $H_p \leftthreetimes K$, где K — некоторая максимальная подгруппа из $H_{p'}$. Так как K не максимальна в H_1, то по лемме 4 K $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Тогда по теореме 1 $H_p \leftthreetimes K \in \mathfrak{F}$ и H — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Предположим теперь, что $H^{\mathfrak{F}} \subset H_p$. Если предположить, что $P \cap G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то $H_{p'}$ не максимальна в H_1. Тогда $H = H^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes PH_{p'}$. Если p не φ-максимальный простой делитель порядка группы H, то в H существует нормальная силовская r-подгруппа R, $r \neq p$. Тогда подгруппа $H^{\mathfrak{F}}R = H^{\mathfrak{F}} \times R \subseteq F(H)$. Если r'-холлова подгруппа S из H_1 не максимальна в H_1, то применяя лемму 4 и теорему 1, получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Пусть S максимальна в H_1. Тогда каждая собственная подгруппа из S будет не максимальна в H_1 и, следовательно, по лемме 4, $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Если подгруппа $H^{\mathfrak{F}}S \in \mathfrak{F}$, то по теореме 1 $H \in \mathfrak{F}$. S максимальна в $H^{\mathfrak{F}}S$, так как в противном случае $H_1 = SH_r$ не максимальна в H. Применяя лемму 9 и теорему 2, получаем, что SH_r — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и $\mathfrak{F}$-корадикал группы $H^{\mathfrak{F}}S$ является силовской p-подгруппой. Так как по нашему предположению $H_1 \neq H_{p'}$, то порядок группы S делится на p и, следовательно, $H^{\mathfrak{F}}S \in \mathfrak{F}$. Тогда, по теореме 1, $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, p — φ-максимальный простой делитель порядка группы H. Тогда $H_p \trianglelefteq H$ и каждая собственная подгруппа из $H_{p'}$ не максимальна в H_1. Если $H_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, то по теореме 1 $H \in \mathfrak{F}$. Так как $H_{p'}$ не максимальна в H, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $H_{p'} \subset N \subset H$. Так как

$H_{p'} \subset N$, то $H_{p'}G^{\mathfrak{F}} \subseteq NG^{\mathfrak{F}} \neq G$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \not\supseteq G_p$ и $P \not\subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что $NH^{\mathfrak{F}} = H_{p'}H^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа $H_{p'}H^{\mathfrak{F}}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппе $M = H_{p'}G^{\mathfrak{F}}$ из G.

1.1. $|G : H| = p^{\alpha}$. Тогда p — φ-максимальный простой делитель порядка группы G и силовская p-подгруппа G_p группы G нормальна в G. Отсюда следует, что $G_p \supset G^{\mathfrak{F}}$. Так как $M^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, то $H_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе $M_1 = P_1 \rtimes H_{p'}$ группы M. По индукции M_1 либо принадлежит формации, либо является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Если M_1 — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $M^{\mathfrak{F}} = M_p = G^{\mathfrak{F}}$ и $H_{p'}M^{\mathfrak{F}} = M$. Противоречие. Значит, $M_1 \in \mathfrak{F}$. Пусть L/K — G-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}$. Но так как $O_p(G/C_G(L/K)) = 1$, то L/K — $H_{p'}$-главный фактор и выполняется изоморфизм $G/C_G(L/K) \simeq H_1/C_{H_1}(L/K) \simeq H_{p'}/C_{H_{p'}}(L/K)$. Так как $M_1 \in \mathfrak{F}$, то P_1 — $\mathfrak{F}$-центральный H_2-главный фактор. Противоречие.

1.2. $|G : H| = q^{\beta}$, $q \neq p$. Так как $(H_{p'}H^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \subseteq M^{\mathfrak{F}}$, то $H_{p'}G_q$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 группы M. Тогда в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа $L = H_1G_q$. Если H_1 не максимальна в L, то по лемме 4 $H_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Противоречие. Значит, H_1 максимальна в L. По условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N_1 такая, что $H_{p'} \subseteq N_1 \subseteq L$. Так как $M_1 \supseteq H_{p'}G_q$, то $N_1 \subseteq M_1$. Если $N_1 \neq M_1$, то $N_1 \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, $H_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Значит, $N_1 = M_1$. Но тогда M_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в M. Противоречие.

2. $H_1 = H_{p'}$ и $H^{\mathfrak{F}} = H_p$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Если каждая максимальная подгруппа из H_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, то H — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Значит, в H_1 найдется максимальная подгруппа K, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в H. Очевидно, что $(|H^{\mathfrak{F}}|, |K|) = 1$. Рассмотрим подгруппу $L = H^{\mathfrak{F}} \rtimes K$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе L_1 из L. Так как L_1 не максимальна в H, то по условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $L_1 \subseteq N \subseteq H$. Так как $N \supset K$ и $N \supset H^{\mathfrak{F}}$, то $N = L$. Рассмотрим подгруппу $M = KG^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. По индукции M_1 либо принадлежит $\mathfrak{F}$, либо является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

2.1. $|G : H| = p^{\alpha}$. Тогда $H_p \trianglelefteq G$. Если предположить, что q является φ-максимальным простым делителем порядка группы M_1, $q \neq p$, то силовская q-подгруппа M_q нормальна в L и по теореме 1 $L = (H_p \times M_q) \rtimes L_{\{pq\}'} \in \mathfrak{F}$. Значит, p — φ-максимальный простой делитель порядка группы M_1. Это значит, что $G_p \trianglelefteq M$ и $M^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$. Пусть M_1 — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Тогда $M_1^{\mathfrak{F}}$ совпадает с силовской p-подгруппой группы M_1 и, следовательно, $M^{\mathfrak{F}} = G_p$. Получили, что $KG_p = KM^{\mathfrak{F}} = M$. С другой стороны, $L = KH_p$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в M. Поэтому $KM^{\mathfrak{F}} \subseteq LM^{\mathfrak{F}} \subset M$. Противоречие. Значит, $M_1 \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $M^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Из того, что K максимальна в M_1, а M_1 максимальна в M, следует, что $M^{\mathfrak{F}}$ — абелева дополняемая в M подгруппа. Так как $L \subseteq KM^{\mathfrak{F}}$ и $H_p \trianglelefteq G$, то $M^{\mathfrak{F}} = H_p$ и $M^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$. По теореме Гашюца 5, $M^{\mathfrak{F}}$ имеет дополнение S в G. Так как K не максимальна в S, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N_1 такая, что $K \subseteq N_1 \subseteq S$. Из того, что $N_1 \subseteq M_1$, следует, что $N_1 \in \mathfrak{F}$. Но тогда K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Противоречие.

2.2. $|G : H| = q^{\alpha}$. Тогда $H_p = G_p$ — силовская p-подгруппа группы G. Рассмотрим p'-холлову подгруппу $G_{p'}$ группы G, содержащую H_1. Так как $H_p \subset G^{\mathfrak{F}}$, то $G_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе группы G. Если H_1 не максимальна в $G_{p'}$, то K будет $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Потому $G_{p'}$ максимальна в G. Ввиду теоремы 2 $G_{p'}^{\mathfrak{F}}$ — q-группа. Если $q \in \pi(H_1)$, то, согласно доказанному выше, лемма верна. Значит, $G_q = G_{p'}^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа в $G_{p'}$. KG_q максимальна в $G_{p'}$. Подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе S группы KG_q. Так как S не максимальна в $G_{p'}$, то по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная в G подгруппа N такая, что $S \subset N \subset G_{p'}$. Так как $KG_q \subseteq NG_q \subset G_{p'}$, то $N = KG_q$. Но подгруппа KG_q будет содержаться в подгруппе M_1 группы M. Если $KG_q \neq M_1$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если же $KG_q = M_1$, то получаем противоречие с тем, что M_1 — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы M. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная S-замкнутая насыщенная формация сверхразрешимых групп, G — несверхразрешимая группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Тогда каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G либо принадлежит $\mathfrak{F}$, либо является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой.*

Доказательство. Предположим, что G не φ-дисперсивна, где φ таково, что $p\varphi q$ равносильно $p > q$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация φ-дисперсивных групп, то по лемме 7, лемма верна. Пусть теперь G φ-дисперсивна. В этом случае лемма верна по лемме 10. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная насыщенная S-замкнутая формация сверхразрешимых групп, G — несверхразрешимая $\pi(\mathfrak{F})$-группа с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Тогда G — группа одного из следующих типов:*

1) $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$ — минимальная несверхразрешимая группа, у которой $|\Phi(G_p)| \leq p$, $|\pi(G_{p'})| \leq 2$;

2) $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$, где $|\pi(G_{p'})| \leq 2$, G_p содержит такую абелеву подгруппу P, нормальную в G, что $G_{p'}P$ — минимальная несверхразрешимая группа, являющаяся в G максимальной подгруппой непростого индекса, подгруппа G_pQ сверхразрешима, где Q — любая максимальная подгруппа из $G_{p'}$;

3) $G = G_p \leftthreetimes G_q$, G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G, подгруппа G_pQ, где Q — произвольная максимальная подгруппа из G_q, является либо сверхразрешимой, либо минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, либо группой типа 2) из данной теоремы;

4) $G = G_p^* \leftthreetimes (G_p^{**}G_q)$, где G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G, $|G_p^{**}| = p$, подгруппа $G_p^{**}G_q \in \mathfrak{F}$, $G_p^*G_q$ является либо минимальной несверхразрешимой группой, либо группой типа 2) из данной теоремы;

5) $G = G_p \leftthreetimes G_qG_r$, G_p — минимальная нормальная подгруппа из G, G_r — абелева группа, G_rG_q и G_pG_q — минимальные несверхразрешимые группы, подгруппа G_pG_rQ либо сверхразрешима, либо минимальная несверхразрешимая группа, где Q — произвольная максимальная подгруппа из G_q;

6) $G = G_p^* \leftthreetimes G_p^{**}G_qG_r$, где G_p^*, G_p^{**} — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|G_p^{**}| = p$, G/G_p^{**} — минимальная несверхразрешимая группа;

7) $G = G_p \leftthreetimes G_qG_r$, где G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G, G_qG_r сверхразрешима, подгруппа $L = QG_p$, где Q — произвольная максимальная подгруппа группы G_qG_r, либо сверхразрешима, либо минимальная несверхразрешимая группа, либо группа типа 2) или 4) из данной теоремы;

8) $G = (G_p \times G_q) \leftthreetimes (G_r \leftthreetimes G_s)$ и имеет точно четыре класса максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются следующие подгруппы: $G_pG_rG_s$, $G_qG_rG_s$ — минимальные несверхразрешимые группы, подгруппы $G_pG_qG_rS$ и $G_pG_qG_sR$ принадлежат $\mathfrak{F}$, где S — произвольная максимальная подгруппа из G_s, R — произвольная максимальная подгруппа из G_r;

9) $G = G_p \leftthreetimes ((G_q \times G_s) \leftthreetimes G_r)$ и имеет точно четыре класса максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются следующие подгруппы: $G_qG_sG_r$ сверхразрешима, $G_pG_qG_r$ — либо минимальная несверхразрешимая группа, либо группа типа 2) из данной теоремы, $G_pG_qG_sR$, где R — произвольная максимальная *подгруппа из G_r, либо принадлежит $\mathfrak{F}$, либо $R = 1$ и $G_pG_qG_s$ является минимальной несверхразрешимой группой или группой типа 2) из данной теоремы, $G_pG_sG_rQ$ либо принадлежит $\mathfrak{F}$, либо $Q = 1$ и $G_pG_sG_r$ является минимальной несверхразрешимой группой или группой типа 2) из данной теоремы.*

Доказательство. По лемме 5 группа G разрешима. Если группа G не дисперсивна по Оре, то к ней применима теорема 7 и данная теорема верна. Поэтому далее мы будем полагать, что группа G дисперсивна по Оре.

1. Рассмотрим вначале случай $\pi(G) = \{p, q\}$, где p и q — различные простые числа. По лемме 11, в группе G любая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Эти два случая мы и рассмотрим.

1.1. Пусть в G имеется несверхразрешимая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H. По лемме 11 $H = H_p \rtimes H_{p'}$ является минимальной несверхразрешимой группой и H_p — абелева группа. Так как $|\pi(G)| = 2$, то либо $|G : H| = p^\alpha$, либо $|G : H| = q^\beta$. Если предположить, что $|G : H| = q^\beta$, то $H_q \subset G_q$ и $|G_q : H_q| > q$. Поэтому H_q не максимальна в G_q и по лемме 4 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Отсюда по теореме 1 $H = G_p \rtimes H_q \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $|G : H| = p^\alpha$, $G^{\mathfrak{F}} \supseteq G_p$ и $H_p \trianglelefteq G$. Из того, что группа дисперсивна по Оре, $|\pi(G)| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}} \supseteq G_p$, следует, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Пусть Q — произвольная максимальная подгруппа из $H_q = G_q$. По условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $Q \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$ и, значит, N сверхразрешима. Следовательно, Q $\mathfrak{U}$-субнормальна в N и в G, где $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Применяя теорему 1, получаем, что подгруппа QG_p сверхразрешима. Итак, в данном случае G — группа типа 2) из данной теоремы.

1.2. Пусть теперь в G все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы. По лемме 2 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. По лемме 8 либо G_q — максимальная подгруппа в G, либо G_q — максимальна в $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H группы G.

Пусть вначале G_q максимальна в G. Пусть Q — произвольная максимальная подгруппа из G_q. Рассмотрим подгруппу $M = QG_p$. Если Q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то по теореме 1 $M \in \mathfrak{F}$. Предположим, что Q не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда Q содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Так как $M \trianglelefteq G$, то $M^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Если $Q = M_1$, то согласно лемме 9 M — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Пусть $M_1 \supset Q$. Тогда $M_1 = P \rtimes Q$ и $P \trianglelefteq M$. Применяя теорему Машке, получаем, что $G_p = P \times P_1$ и $P_1 \trianglelefteq M$. Если $M_1 \in \mathfrak{F}$, то $M^{\mathfrak{F}} \subseteq P_1$. Противоречие. По лемме 11, M_1 — минимальная несверхразрешимая группа. Если Q_1 — произвольная максимальная подгруппа из Q, то ввиду леммы 4, Q_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Применяя теорему 1, получаем, что подгруппа $Q_1G_p \in \mathfrak{F}$. Значит, M — группа типа 2) из данной теоремы, а G — группа типа 3) из данной теоремы.

Пусть теперь G_q не максимальна в G. Тогда по лемме 8, G_q содержится в качестве максимальной подгруппы в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H группы G. Тогда группа H представима в виде $H = P_1 \rtimes G_q$, где P — p-группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Тогда любая $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G имеет вид $G_p \rtimes Q$, где Q — некоторая максимальная подгруппа из G_q, и, следовательно, по теореме 1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Получили, что группа G — минимальная несверхразрешимая группа. Предположим, что $\Phi(G_p) = 1$. Тогда по теореме Машке $G_p = P \times P_1$. Ввиду следующего равенства $G/P = PP_1G_q/P \simeq P_1G_q = H \in \mathfrak{F}$ получаем противоречие с тем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Итак, G — группа типа 1) из данной теоремы. Если же $G_p \subset G^{\mathfrak{F}}$, то группа G имеет вид $G = P \rtimes (P_1 \rtimes G_q)$ и $G^{\mathfrak{F}} = P$. Так как G_q

максимальна в H, то $|P_1| = p$. Рассмотрим подгруппу $M = P \leftthreetimes G_q$. Если $M \in \mathfrak{F}$, то G_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Учитывая, что G дисперсивна, по теореме 1 получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Каждая собственная подгруппа из G_q будет не максимальна в H и по лемме 4 $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Если G_q максимальна в M, то M — минимальная несверхразрешимая группа. В этом случае G — группа типа 4) из данной теоремы. Если предположить, что G_q не максимальна в M, то она содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе $M_1 = P \leftthreetimes G_q$ из M. Получили, что $P \trianglelefteq M$ и $P \trianglelefteq G_p$. Это значит, что $P \trianglelefteq G$. Противоречие с тем, что H — максимальная подгруппа в G.

2. Рассмотрим случай $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где p, q и r — различные простые числа. Согласно лемме 11 в группе G либо все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы, либо являются минимальными несверхразрешимыми группами, у которых нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Рассмотрим эти два случая.

2.1. Предположим, что в G имеется несверхразрешимая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H. По лемме 11 H является минимальной несверхразрешимой группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Предположим, что $|\pi(H)| = 2$. Так как $|\pi(G)| = 3$, то $H = G_r \leftthreetimes G_q$ и $|G : H| = p^\alpha$, $\alpha > 1$. Применяя теорему 2 и учитывая, что $H^{\mathfrak{F}} = G_r$, получаем $G^{\mathfrak{F}} = G_rG_p$. Из того, что G разрешима, следует, что либо G_r, либо G_p нормальна в G. В G существует подгруппа $L = G_qG_p$. Подгруппа L содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе L_1 группы G. Предположим, что $L \subset L_1$. Тогда G_q будет не максимальна в L_1 и по условию найдется $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $G_q \subseteq N \subseteq L_1$. Ясно, что $N \neq L_1$. Поэтому $N \in \mathfrak{F}$, а это значит, что G_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда по теореме 1 $H = G_r \leftthreetimes G_q \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $L = L_1$. Ясно также, что $L \notin \mathfrak{F}$ и G_q максимальна в L. Тогда $L = G_p \leftthreetimes G_q$ — минимальная несверхразрешимая группа, у которой G_p — абелева группа. Пусть Q — произвольная максимальная подгруппа из G_q. Рассмотрим подгруппу $M = G^{\mathfrak{F}}Q$. Предположим, что $M \notin \mathfrak{F}$. Так как либо $G_r \trianglelefteq G$, либо $G_p \trianglelefteq G$, то пусть для определенности $G_p \trianglelefteq G$. Из того, что $M/G_p = QG_rG_p/G_p \simeq QG_r \subset H$, следует, что $QG_r \in \mathfrak{F}$ и $M^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$. Имеем $M \trianglelefteq G$ и G_p — минимальная нормальная подгруппа в G, поэтому $M^{\mathfrak{F}} = G_p$. Значит, подгруппа G_rQ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Пусть K — произвольная подгруппа из G_rQ, отличная от G_rQ. Тогда по условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $K \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. Поэтому $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Предположим, что $M_1 = G_rQ$. Согласно лемме 9 M — минимальная несверхразрешимая группа. В этом случае G — группа типа 5). Пусть $M_1 \supset G_rQ$. Тогда $M = P \leftthreetimes G_rQ$, где P — p-группа. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 9 M_1 — минимальная несверхразрешимая группа. Если $Q \neq 1$, то G_r — циклическая группа. Противоречие. Предположим, что $Q = 1$. Тогда $|G_q| = q$. Подгруппа G_q самонормализуема в G, так как в $H = G_rG_q$ и $L = G_pG_q$, подгруппа G_q является максимальной. Значит, G — группа Фробениуса с ядром $G^{\mathfrak{F}} = G_rG_p$ и дополнительным множителем G_q. Значит $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Противоречие. Остается рассмотреть случай, когда $M_1 \in \mathfrak{F}$. По теореме Машке $G_p = P \times P_1$ и $P_1 \trianglelefteq M$. Отсюда получаем, что $M = P_1 \leftthreetimes M_1$ и $P_1 = M^{\mathfrak{F}}$. Противоречие. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Если $G_r \trianglelefteq G$, то проводя рассуждения, аналогично вышеизложенным, получаем, что M либо принадлежит формации, либо является минимальной несверхразрешимой группой. Итак, G — группа типа 5) из данной теоремы.

Пусть теперь $H = H_p \leftthreetimes H_{p'}$ — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(H)| =$

$= 3$. Так как $|\pi(G)| = 3$, то $|G : H| = r^\alpha$, $\alpha > 1$ и $r \in \pi(H)$. Предположим, что $r \in \pi(H_{p'})$. В G существует подгруппа $G_{p'}$, содержащая $H_{p'}$. Так как $H_p \subset G^{\mathfrak{F}}$, то $G_{p'}G^{\mathfrak{F}} = G$ и $G_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H_1 из G. Предположим, что $H_1 \supset G_{p'}$. Применяя лемму 11, получаем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$, а значит, $G_{p'} \in \mathfrak{F}$. Подгруппа $H_{p'}$ не максимальна в $G_{p'}$, так как $|G : H| = r^\alpha$, $\alpha > 1$ и $G_{p'} \in \mathfrak{F}$. По условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $H_{p'} \subseteq N \subseteq G_{p'}$. Отсюда следует, что $H_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в H. Противоречие. Итак, $H_1 = G_{p'}$ — минимальная несверхразрешимая группа. Так как $|\pi(H_{p'})| = 2$, то $G_{p'} = G_q \rtimes G_r$. Приходим к случаю, рассмотренному выше, откуда следует, что в G нет $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп, порядок которых делится на три различных простых числа. Итак, $|G : H| = p^\alpha$, $\alpha > 1$ и $H_{p'} = G_{p'}$. Ясно, что $H_p \trianglelefteq G$ и $G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду того, что группа G дисперсивна по Оре, получаем, что p — наибольший простой делитель $|H|$ и $|G|$, а значит, $G_p \trianglelefteq G$. Из $G/G_p \in \mathfrak{F}$ следует, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Пусть T — произвольная максимальная подгруппа из $G_{p'}$. По условию в G существует такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N такая, что $T \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \neq H$. Поэтому N сверхразрешима. Отсюда следует, что T $\mathfrak{U}$-субнормальна в G, где $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Применяя теорему 1, получаем, что подгруппа G_pT сверхразрешима. Следовательно, G — группа типа 2) из данной теоремы.

2.2. Пусть теперь в G все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы. По лемме 2 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. По лемме 8 либо $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в G, либо $G_{p'}$ — максимальна в $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H группы G.

Пусть $G_{p'}$ максимальна в G. Так как $|\pi(G)| = 3$, то $G_{p'} = G_qG_r$. Согласно доказанному выше получаем, что в этом случае G группа типа 7) из данной теоремы.

Предположим теперь, что $G_{p'}$ не максимальна в G. Тогда $H = P \rtimes G_{p'}$, где P — p-группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Тогда любая $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G имеет вид $G_p \rtimes Q$, где Q — некоторая максимальная подгруппа из $G_{p'}$, и, следовательно, по теореме 1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Получили, что группа G — минимальная несверхразрешимая группа. Предположим, что $\Phi(G_p) = 1$. Тогда по теореме Машке $G_p = P \times P_1$. Ввиду следующего равенства $G/P = PP_1G_{p'}/P \simeq$ $\simeq P_1G_{p'} = H \in \mathfrak{F}$ получаем противоречие с тем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Итак, G — группа типа 1) из данной теоремы. Пусть теперь $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. В этом случае $G = G_p^* \rtimes G_p^{**}G_{p'}$. Так как $|\pi(G)| = 3$, то $G_{p'} = G_qG_r$. Согласно лемме 4 подгруппы G_q и G_r будут $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Очевидно, что $p > q$, $p > r$. Поэтому $G_p^{**} \trianglelefteq H$ и $G_p \trianglelefteq G$. Рассмотрим подгруппу $M = G_p^*G_qG_r$. Подгруппа G_qG_r содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 группы M. Если $M_1 = G_qG_r$, то M — минимальная несверхразрешимая группа. Предположим, что $M_1 \supset G_qG_r$. Тогда $M_1 = P \rtimes G_rG_q$, где P — p-группа и $P \trianglelefteq M$. Так как $G_p^{**} \trianglelefteq G$, то $G_p = G_p^{**} \times G_p^*$ — элементарная абелева группа. Значит, $N_G(P) = \langle M, G_p^{**} \rangle = G$ и $G/G_p^{**} = G_p^{**}M/G_p^{**} \simeq M$ — минимальная несверхразрешимая группа. Следовательно, G — группа типа 6) из данной теоремы.

3. Рассмотрим случай $\pi(G) = \{p, q, r, s\}$, где p, q, r и s — различные простые числа. Согласно лемме 11 в группе G либо все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы, либо являются минимальными несверхразрешимыми группами, у которых нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Рассмотрим эти два случая.

3.1. Предположим в G имеется несверхразрешимая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H. По лемме 11 H является минимальной несверхразрешимой группой, у которой нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Так как $|\pi(G)| = 4$, то $H = G_p \rtimes (G_r \rtimes G_s)$ и $|G : H| = q^\alpha$, $\alpha > 1$. Отсюда получаем, что $G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $G_q \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Применяя лемму 4 и теорему 2, получаем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_pG_q$. Рассмотрим подгруппу $L = G_rG_sG_q$. Так как $G^{\mathfrak{F}}L = G$, то L содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе L^* из G. Если $L^* \supset L$, то $|\pi(L^*)| = 4$, и согласно лемме 11, $L^* \in \mathfrak{F}$. Подгруппа G_rG_s не максимальна в L^*. Поэтому по лемме 4, G_rG_s $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в H. Противоречие. Следовательно, $L^* = L$, и согласно лемме 11, $L = G_q \leftthreetimes G_rG_s$ — минимальная несверхразрешимая группа, у которой G_q является минимальной нормальной подгруппой. Отсюда следует, что $N_L(G_r) = G_rG_s$ и $C_{G_q}(G_r) = 1$. Рассмотрим подгруппу $K = G_qG_r$. Подгруппа G_r циклическая. Поэтому K/G_q — абелева группа. Так как $C_{G_q}(G_r) = 1$, то $K' = G_q$. Аналогично получаем, что коммутантом группы $K_1 = G_pG_r$ является G_p. Пусть $M = G^{\mathfrak{F}}G_r = G_pG_qG_r$. Легко видеть, что M сверхразрешима. Значит, $M' \in \mathfrak{N}$. Так как $(G_pG_r)' = G_p$ и $(G_qG_r)' = G_q$, то $G_q \subseteq M'$ и $G_p \subseteq M'$. Отсюда получаем, что $[G_q, G_p] = 1$. Значит, $G_p \trianglelefteq G$ и $G_q \trianglelefteq G$. Пусть T — произвольная максимальная подгруппа из G_rG_s. По условию в G существует $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная подгруппа N такая, что $T \subseteq N \subseteq H$. Ясно, что $N \subset H$. Поэтому N принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Применяя теорему 1, получаем $TG_pG_q \in \mathfrak{F}$. Так как G_r и G_s — циклические группы, то в G_rG_s два класса максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются подгруппы G_sR и G_rS, где R — максимальная подгруппа из G_r, S — максимальная подгруппа из G_s. Значит, подгруппы $G_pG_qG_sR$ и $G_pG_qG_rS$ принадлежат $\mathfrak{F}$, и G — группа типа 8) из данной теоремы.

3.2. Пусть теперь в G все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы. По лемме 2, $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. По лемме 8, либо $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в G, либо $G_{p'}$ максимальна в $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H группы G.

Предположим, что $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в G. В $G_{p'}$ существует максимальная подгруппа H, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в G и $|\pi(H)| \geq 2$. Рассмотрим подгруппу $M = G_p \leftthreetimes H$. Так как $M^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$ и $(|M^{\mathfrak{F}}|, |H|) = 1$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 группы M. Если $M_1 = H$, то по лемме 9 M — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда $M_1 = P \leftthreetimes H$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то по лемме 11 M_1 — минимальная несверхразрешимая группа. Предположим теперь, что $M_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $|P| = p$, ввиду леммы 4. Подгруппа $P \trianglelefteq M$, поэтому по теореме Машке $G_p = P \times P_1$ и $P_1 \trianglelefteq M$. Рассмотрим подгруппу $M_2 = P_1H$. Подгруппа P_1 будет минимальной нормальной подгруппой группы M_2, в противном случае в M_2 существует минимальная нормальная подгруппа P_2, для которой $N_M(P_2) = M$ и $P_2P_1H \neq H$. Применяя лемму 9, получаем, что M_2 — минимальная несверхразрешимая группа. Итак, мы показали, что в G_p существует подгруппа $P^* \subseteq G_p$ такая, что $P^* \leftthreetimes H$ — минимальная несверхразрешимая группа. Значит, $H = G_qG_r$, G_q и G_r — циклические группы. По доказанному выше M может быть группой типа 2), 7) из данной теоремы. Если M — группа типа 7), то так как согласно лемме 4 любая максимальная подгруппа из H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, M — минимальная несверхразрешимая группа. Итак, мы показали, что подгруппа $M = G_pG_qG_r$ — либо минимальная несверхразрешимая группа, либо является группой типа 2) из данной теоремы.

Так как подгруппа H максимальна в $G_{p'}$ и $G_{p'} \in \mathfrak{F}$, то $|G_{p'} : H| = s$ и $G_{p'} = HG_s$. Из того, что все силовские подгруппы из $G_{p'}$ циклические, следует, что в $G_{p'}$ всего четыре класса максимальных сопряженных подгрупп. Так как $G_q \trianglelefteq G_{p'}$ и G_q — циклическая группа, то максимальная подгруппа Q из G_q нормальна в $G_{p'}$. Подгруппа $L = G_rG_sQ$ максимальна в $G_{p'}$. Рассмотрим теперь подгруппу $K = LG_p$. Если $Q \neq 1$, то $|\pi(K)| = 4$. Если предположить, что $K \notin \mathfrak{F}$, то L содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе K_1 из K. Если $K_1 = L$, то K — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(K)| \leq 3$. Противоречие. Пусть $K_1 \supset L$. Тогда L максимальна в K_1, причем K_1 — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(K)| \leq 3$. Противоречие. Итак, $K \in \mathfrak{F}$. Пусть $Q = 1$. Тогда $|\pi(K)| = 3$, и согласно доказанному выше, K либо сверхразрешима, либо минимальная несверхразрешимая группа, либо группа типа 2) из данной теоремы.

Пусть $L_1 = G_qG_sR$, где R — максимальная подгруппа из G_r. Рассмотрим подгруппу $T = G_pL_1$. Если $R \neq 1$, то $|\pi(S)| = 4$, и согласно доказанному выше, L_1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По теореме 1 $T \in \mathfrak{F}$. Пусть $R = 1$. Тогда $|\pi(K)| = 3$, и согласно доказанному выше, K либо сверхразрешима, либо минимальная несверхразрешимая группа, либо группа типа 2) из данной теоремы.

Подгруппы G_q, G_r и G_s циклические, поэтому в $G_qG_rG_s$ три класса максимальных сопряженных подгрупп и, значит, в G три класса $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных сопряженных подгрупп, представителями которых являются подгруппы: $G_pG_qG_r$, $G_pG_qG_sR$ и $G_pG_sG_rQ$. Группа G в этом случае является группой типа 9) из данной теоремы.

Пусть теперь $G_{p'}$ не максимальна в G. Тогда $H = P \leftthreetimes G_{p'}$, где $|P| = p$. Если $G^{\mathfrak{F}} = G_p$, то G — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(G)| \leq 3$. Противоречие. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Тогда $G = P_1 \leftthreetimes H$. Ввиду дисперсивности группы G $G_p \trianglelefteq G$. Пусть M — произвольная $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа. Если $|G : M|$ — p'-число, то M сверхразрешима. Предположим, что $|G : M|$ — степень p. Тогда $M = P_1 \leftthreetimes G_{p'}$. $G_{p'}$ содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Если $M_1 = G_{p'}$, то M — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(M)| \leq 3$. Противоречие. Значит, $M_1 \supset G_{p'}$. $G_{p'}$ максимальна в M_1, так как в противном случае G сверхразрешима. По лемме 9 M_1 — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(M)| \leq 3$. Противоречие. Итак, M сверхразрешима. Ввиду произвольности выбора M получаем, что G — минимальная несверхразрешимая группа и $|\pi(G)| \leq 3$. Противоречие.

4. Рассмотрим случай $|\pi(G)| = 5$. Согласно лемме 11, в группе G $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы либо сверхразрешимы, либо являются минимальными несверхразрешимыми группами, у которых нормальная силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой. Если в G имеется несверхразрешимая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа H, то $|\pi(H)| \leq 3$ и, ввиду разрешимости группы G, $|\pi(G)| \leq 4$. Противоречие. Пусть теперь в G все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы сверхразрешимы. По лемме 2 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. По лемме 8 либо $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в G, либо $G_{p'}$ — максимальна в $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе H группы G. Если $G_{p'}$ не максимальна в G то по доказанному выше $|\pi(G)| \leq 3$. Остается случай, когда $G_{p'}$ — максимальная подгруппа в G. В этом случае $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$ и в $G_{p'}$ найдется максимальная подгруппа H, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в G. Рассмотрим подгруппу $M = G_p \leftthreetimes H$, $|\pi(M)| \geq 4$. Ввиду леммы 4, каждая собственная подгруппа из H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Подгруппа H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе M_1 из M. Если $M_1 = H$, то по лемме 9, M — минимальная несверхразрешимая группа. Противоречие. Значит, $M_1 \supset H$ и H максимальна в M_1. По лемме 9 M_1 — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда $|\pi(M)| \leq 3$. Противоречие. Теорема доказана.

Abstract. The description of finite groups with a dense system of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups is obtained in the case when $\mathfrak{F}$ is a saturated S-closed supersoluble or φ-dispersive formation.

Литература

1. В. В. Пылаев, *Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп*, в книге: *Исследования по теории групп*, Киев, Институт мат-ки АН УССР, 1975, с. 197–217.

2. Л.Н. Закревская, *Конечные группы с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп*, в книге: *Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп*, Минск, Наука и техника, 1984, с.71–88.

3. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

4. Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

5. T. Hawkes, *On formation subgroups of a finite soluble group*, J. London Math. Soc. **44**, № 2 (1968), 243–250.

6. Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

7. В.Н. Семенчук, *Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы*, Алгебра и логика, **18**, № 3 (1979), 348–382.

8. Ю.А. Гольфанд, *О группах, все подгруппы которых специальные*, Докл. АН СССР, **60**, № 8 (1948), 1313–1315.

9. L. Rédei, *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrecen, **4**, 1965, p.303–324.

10. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1967.

11. W. Gaschütz, *Zur Erweiterungstheorie endliher Gruppen*, J.reine angew.Math. **190**, 1952, p.93–107.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.09.04