Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5 (44), 2007

**Прикладная математика**

*УДК 681.3.06:624.13*

# Оптимизация алгоритма численного моделирования устойчивости нелинейных систем деформируемых твёрдых тел

В. Е. Быховцев, К. С. Курочка, В. В. Бондарева

**Постановка задачи**

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы исследования нелинейных математических моделей пространственных нелинейных систем деформируемых твёрдых тел. Оптимизация задач рассматриваемого класса предусматривает следующие этапы: построение оптимальной схемы дискретизации виртуальной физической модели исследуемой системы; определение эффективных методов решения нелинейной краевой задачи и системы алгебраических уравнений высокого порядка.

**Дискретизация физической системы**

В настоящей работе дискретизацию предлагается производить конечными элементами в форме параллелепипедов, каждый из которых в свою очередь разбивается тремя секущими плоскостями на шесть равновеликих тетраэдров. При этом дискретизация должна быть согласованной, что возможно при условии гомеоморфности противоположных граней параллелепипеда. Такой двухступенчатый подход к процессу дискретизации является достаточно удобным и гибким для построения дискретизованной области нерегулярной структуры.

**Используемые алгоритмы решения поставленной задачи**

В качестве исследуемых методов решения системы алгебраических уравнений (СЛАУ) были выбраны метод Гаусса, метод квадратного корня и метод сопряжённых градиентов с предобусловливанием Холецкого.

Для нахождения нелинейного решения граничной задачи использовались метод начальных напряжений [2, 3] и методы энергетической линеаризации [1, 2, 4].

В методах начальных напряжений и энергетической линеаризации предполагается, что закон деформирования элементов системы можно представить в виде:

$$\{\sigma\} = \Psi\left(\{\varepsilon\}\right) \quad \text{или} \quad \sigma_i = f(**)\,\varepsilon_i\,, \tag{1}$$

где f(**) – функция модуля упругости при нелинейном деформировании, при линейном деформировании f(**) = E, E – модуль упругости, $\sigma_i, \varepsilon_i$ – интенсивность напряжений и деформаций. В частности при нелинейно-упругом деформировании

$$(\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad A > 0\,, \quad 0 < m < 1); \tag{2}$$

при линейно-упругом деформировании

$$\sigma_i = E\varepsilon_i\ . \tag{3}$$

Метод начальных напряжений итерационный, при его использовании совместно с методом конечных элементов на каждой итерации необходимо решать следующую линейную задачу:

$$\left[K\right]\left\{g_i\right\}=\left\{R_i\right\}, \tag{4}$$

с различной правой частью $\left\{R_i\right\}$, которая корректируется на каждой итерации в зависимости от разницы между действительными напряжениями и достигнутыми. Матрица $\left[K\right]$ на каждой итерации остаётся постоянной, т.е. можно один раз вычислить $\left[K\right]^{-1}$ и затем использовать её в дальнейших расчётах. Т.о., время, затрачиваемое на проведение последующих итераций, будет значительно меньше времени нахождения линейного решения. Для вычисления обратной матрицы использовался метод Гаусса и $[L][D][L]^T$ разложение, модифицированные авторами, с целью учёта ленточной структуры и симметричности матрицы $\left[K\right]$ [5].

В методе энергетической линеаризации краевой задаче нелинейной теории упругости телу объёма *V* с границей *Г* и законом деформирования (1) ставится в соответствие геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с законом деформирования

$$\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i \,. \tag{5}$$

*Модуль упругости* $E^г$ *подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения совпадали.*

В соответствии с принципом возможных перемещений [2, 4] для всякой сплошной среды

$$\delta\left(\int_V \Pi \, dV - W\right) = 0, \tag{6}$$

П – потенциал деформации, W – работа внешних сил.

Для единичного элемента $\quad \Pi = \dfrac{\varepsilon^2}{6k} + \displaystyle\int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i \, d\varepsilon_i \,, \qquad k = \dfrac{1-2\mu}{E}\,,$

где ε – средняя деформация, k – коэффициент объемного сжатия.

В силу поставленного условия для модуля упругости $E^г$ и тождественности граничных условий для рассматриваемых твёрдых тел можно утверждать, что работы внешних сил на смещениях для исследуемого нелинейно – деформируемого и гипотетического линейно-упругого тел будут равны, т.е. будем иметь $W^n = W^r$, тогда

$$\delta \int_V (\Pi^n - \Pi^r) dV = \delta \int_V \left(\int \sigma_i^n d\varepsilon_i - \int \sigma_i^r d\varepsilon_i\right) dV = \delta \int_V \left(\int f(**) \ \varepsilon_i \, d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i \, d\varepsilon_i\right) dV = 0 \,,$$

$\Pi^n$ – энергия деформации нелинейно-упругого тела,
$\Pi^r$ – энергия деформации гипотетического линейно – упругого тела, индексы “*n*” и “*r*”– признаки нелинейно-упругого и гипотетического линейно – упругого тел.

Полученное выражение представим в следующей форме

$$\delta \int_V \varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r/2\right) dV = \int_V \delta\varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r/2\right) dV = 0\,, \tag{7}$$

где $F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} \int f(**) \, \varepsilon_i d\varepsilon_i$ .

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (7) следует:

$$F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r/2 = 0. \tag{8}$$

При законе деформирования в виде (2) из (8) получим:

$$\sigma_i^n = 0{,}5\,(1+m)\,\sigma_i^e \tag{9}$$

Подставим (9) в уравнение состояния (2) и, учитывая закон Гука $\sigma_i^e = E\varepsilon_i^e$, решим его относительно $\varepsilon_i$, получим:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{1+m}{2A} E_0 \varepsilon_i^e\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i} = E_0 \left[ \frac{2A}{(1+m)E_0 \varepsilon_i^{1-m}} \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Если закон деформирования имеет вид

$$(\sigma_i^н = E_0\,\varepsilon_i - B\,\varepsilon_i^m\,, \quad B > E\,, \quad m > 1\ ),$$

то $\varepsilon_i$ определяется из уравнения: $E_0\,\varepsilon_i$ - 2B/(1+m) $\varepsilon_i^m = \sigma_i^e$, в этом случае

$$E^r = \sigma_i^e / \varepsilon_i = E_0 - 2B\,/\,(1+m)\,\varepsilon_i^{m-1}.$$

Для полученных значений $E^r$ решается линейная задача, которая, согласно принятым условиям, будет являться и решением исходной нелинейной задачи.

**Моделирование**

Исследование методов проводилось на решении краевой задачи нелинейной механики грунтов, для которой известны результаты натурного эксперимента [2].

*Модельная задача 1.* Определить осадку железобетонной висячей сваи сечением 0,25·0,25м при глубине погружения 5м в нелинейно-деформируемое грунтовое основание под действием вертикальной статической нагрузки $q$ [2]. Приведённые начальные характеристики грунтового основания $E$ = 6.875 МПа, $\mu$ = 0.41.

При моделировании уравнение состояния принято в виде (2). Значения параметров $A$ и $m$ определены на основании экспериментальных данных, при этом получено $A$ = 4,55 МПа, $m$ = 0.29. Задача рассматривалась как пространственная. В методе начальных напряжений применялся коэффициент ускорения сходимости, который для рассматриваемых модельных задач оказался равным 1.55.

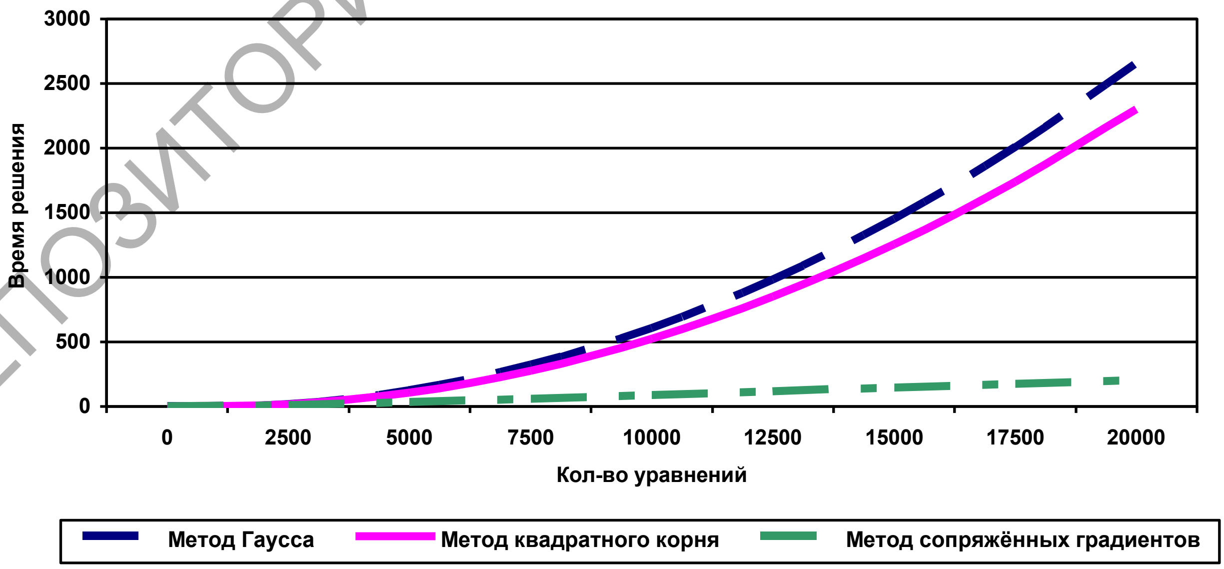


Рисунок 1 – Влияние метода решения СЛАУ на скорость их решения при различных схемах дискретизации

Таблица 1 – Осадки одиночной висячей сваи, q=200кН

| Метод решения СЛАУ | Линейное решение (1-я итерация) | | Метод энергетической линеаризции | | Метод начальных напряжений | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Время, с | Осадка, см | Время, с | Осадка, см | Время, с | Кол-во итерций | Осадка, см |
| Гаусса | 57 | 0.47 | 112 | 2.21 | 497 | 9 | 2.26 |
| Квадратного корня | 54 | 0.48 | 110 | 2.20 | 486 | 9 | 2.27 |
| Сопряжённых градиентов (1 подход) | 28 | 0.48 | 57 | 2.22 | 252 | 9 | 2.28 |
| Сопряжённых градиентов (2 подход) | 28 | 0.48 | 49 | 2.21 | 151 | 9 | 2,29 |
| Обратная матрица (метод Гаусса) | 578 | 0.49 | 1157 | 2.24 | 579 | 9 | 2.25 |
| Обратная матрица ($[L][D][L]^T$ разложение) | 539 | 0.48 | 1078 | 2.21 | 540 | 9 | 2.27 |
| Используя $[L][D][L]^T$ разложение | 54 | 0.48 | 108 | 2.20 | 55 | 9 | 2.27 |
| Эксперимент | | 2.24 | | 2.24 | | | 2.24 |

В силу симметричности, рассматривалась одна четверть расчетной области. Точность решения выбрана 0.001. Результаты вычислений приведены на графике рисунка 1 и в таблице 1.

*Модельная задача 2.* Рассматривается предыдущая задача при действии нагрузки q = 200кН. Но расчётная область разбивалась на различное количество узлов: 1800, 3685, 7290, 11664, 24336. Получаемая СЛАУ решалась методом квадратного корня, сопряжённых градиентов с предобусловливанием Холецкого. Обращение матрицы осуществлялось с использованием $[L][D][L]^T$ разложения. Результаты моделирования приведены в таблице 2 и на рисунке 2.

Таблица 2 – Осадки одиночной висячей сваи при нагрузке q=200кН, 3675 узлов

| Метод решения СЛАУ | Метод энергетической линеаризации | | Метод начальных напряжений | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Время, с | Осадка, см | Время, с | Кол-во итераций | Осадка, см |
| Квадратного корня | 103 | 2.20 | 486 | 9 | 2.27 |
| Сопряжённых градиентов (2 подход) | 49 | 2.21 | 151 | 9 | 2,29 |
| Обратная матрица ($[L][D][L]^T$ разложение) | 1078 | 2.21 | 1079 | 9 | 2.27 |
| Используя $[L][D][L]^T$ разложение | 103 | 2.20 | 51 | 9 | 2.27 |
| Эксперимент | | 2.24 | | | 2.24 |

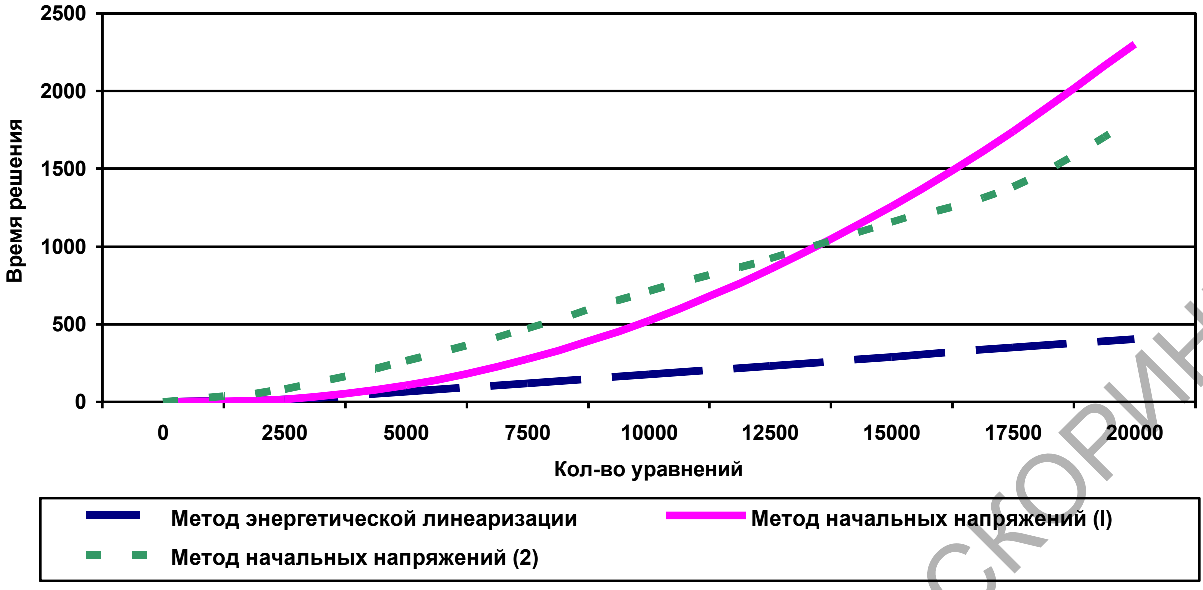


Рисунок 2 – Влияние методов решения нелинейных задач на скорость их решения при различных схемах дискретизации

На рисунке 2 представлено время решения нелинейной краевой задачи методом энергетической линеаризации при решении СЛАУ методом сопряжённых градиентов при использовании 2 подхода. В методе начальных напряжений в первом случае применялось $[L][D][L]^T$ разложение, во втором – использовался метод сопряжённых градиентов.

**Основной вывод**

При компьютерном моделировании нелинейных систем деформируемых твёрдых тел наиболее эффективными являются метод энергетической линеаризации в сочетании с методом сопряжённых градиентов с предобусловливанием Холецкого, которые позволяют исследовать пространственные нелинейные системы МКЭ на сетке 50x50x50 узлов, что соответствует СЛАУ с 375000 неизвестных.

**Abstract.** The construction of the optimum algorithm of definition of stability of nonlinear systems of deformable solids is investigated in the paper.

### Литература

1. Бондарева, В.В. Компьютерное моделирование осадок структур свай на нелинейно-деформируемом грунтовом основании / В.В. Бондарева // Материалы, технологии, инструменты, 2000. – №4. – с.13-16.
2. Быховцев, В. Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В. Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219с.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 540с.
4. Курочка, К. С. Метод численного решения краевых задач нелинейной теории упругости / К. С. Курочка // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого, 2005. – №1. – С. 49–57.
5. Самарский А. А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 17.04.07