Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5 (44), 2007

УДК 681.3

Алгоритм формирования интегрального максимального потока транспортной сети региона

П. В. Гируц

Введение

Сложные структуры, представленные в виде графов, описывают широкий класс систем, имеющих важное практическое и научное значение. Примерами таких структур являются: ячейки химических реакций, действующих по сетевому типу; социальные системы, вершинами которых являются люди, а рёбрам отвечают социальные связи между ними; интернет, представляющий сеть связанных компьютеров.

Одну из областей, использующих графовые структуры, определяют задачи исследования транспортных сетей. В настоящее время за счёт резкого увеличения числа транспортных средств в сетях дорог существенно возросли требования к рациональной организации транспортных потоков. С этой целью, как правило, оценивают максимальный поток в сети, находят наиболее эффективное распределение потока, выявляют узкие места и своевременно их ликвидируют. Одновременно с этими задачами оценивают суммарные затраты транспортных средств при их движении из начального пункта в конечный.

Для решения задачи нахождения максимального потока в транспортной сети обычно используется алгоритм Форда-Фалкерсона [1]. По своему характеру это итеративный алгоритм, идея которого заключается в постепенном наращивании потока через сеть до тех пор, пока его величина не достигнет максимума, и дальнейшее увеличение потока перестанет быть возможным.

Однако алгоритм Форда-Фалкерсона имеет ряд ограничений, которые на практике не выполняются. Во-первых, пропускные способности ветвей сети должны быть целыми неотрицательными детерминированными числами. В реальной сети пропускная способность не является постоянной и зависит от таких вероятностных факторов, как: загруженность, физическое состояние дороги, параметры внешней среды. Загруженность на различных участках дороги бывает различной и зависит от наличия внутренних транспортных потоков на данном участке, которые могут рассматриваться как помехи при передвижении транспортной единицы из начального пункта сети в конечный пункт, так как они отнимают некоторый ресурс сети у основных транспортных потоков через сеть. Состояние дороги определяется её изношенностью, условиями эксплуатации, влиянием погодных условий. Параметры внешней среды изменяются в зависимости от времени года и времени суток. Как правило, в транспортной сети перечисленные факторы являются взаимосвязанными.

Во-вторых, выполнение алгоритма предлагается начинать с некоторого, уже существующего в сети, начального потока, в то время как выбор начального потока не изменяет величину максимального потока, но изменяет расположение максимального потока в сети [2].

В-третьих, задача о поиске максимального потока решается для единственного потока через сеть, т. е. в самой сети должен быть только один вход (исток) узел сети, через который поток попадает в сеть, и только один выход (сток), узел сети, через который поток выходит из сети.

Исходя из вышеизложенного, в качестве выхода из положения исследователи вынуждены прибегать к имитационному моделированию транспортных потоков в сети дорог [3]. В статье предлагается метод выбора рационального варианта организации транспортных потоков с сети в заданном направлении, снимающий перечисленные ограничения алгоритма

Форда-Фалкерсона. Он позволяет определить максимальный поток и его распределение по ветвям сети, обладающее наилучшей эффективностью среди остальных вариантов распределения потоков в сети, пропускные способности ветвей которой изменяются случайным образом. Рассматривается задача нахождения интегрального максимального потока в сети, имеющей заданное количество входов и выходов, определяющих некоторое направление движения транспорта в сети.

1 Формализация объекта моделирования

В качестве объекта моделирования рассматривается система транспортных потоков на участке автомобильных дорог некоторого региона. Определим транспортную сеть при помощи ориентированного, не имеющего циклических дуг графа G размерности N с пронумерованными вершинами (G,N). Поскольку граф представляет транспортную сеть, то каждое его ребро описывается следующими характеристиками:

– пропускной способностью дороги между узлами транспортной сети;
– длиной дороги между узлами транспортной сети;
– стоимостью перемещения одной транспортной единицы по дороге между узлами транспортной сети;
– величиной потока на дороге между узлами транспортной сети.

Под пропускной способностью дороги (ветви графа) будем понимать максимально возможное количество единиц транспорта, которое способна пропустить через себя ветвь за выбранную единицу времени. Длина дороги задаётся в условных единицах. Величина потока задаёт количество единиц транспорта, движущееся по участку сети.

Ставится задача исследования транзитных транспортных потоков региона в заданном географическом направлении. Каждое направление характеризуется множеством транзитных потоков, т. е. потоков от различных начальных входов на одной границе транспортной сети к различным конечным выходам на противоположной границе. Все потоки рассматриваемого участка дорог региональной сети разделяются по направлениям Север-Юг, Запад-Восток, Юг- Север и Восток-Запад.

В сети предполагается существование ещё и не транзитных внутренних потоков. Это потоки, транспортные средства которых движутся в направлении от одного внутреннего узла сети (начала внутреннего потока) к другому внутреннему узлу сети (окончанию движения внутреннего потока). Они отнимают некоторую часть ресурсов транспортной сети, влияя тем самым на величину основных транзитных потоков.

Для проведения исследований выберем одно из направлений, например, Запад-Восток (ZV). Для рассматриваемого направления начальные узлы потоков расположены на западной границе транспортной сети региона, а конечные узлы потоков расположены на восточной границе сети региона. Зададим множества: начальных узлов – «входов» транзитных потоков $\{Z_1, Z_2,..., Zm\}$, где Z_i, $i=\overline{1,m}$ номера начальных вершин транзитных потоков, которые расположены на западной границе региона; конечных узлов – «выходов» транзитных потоков $\{V_1, V_2,..., Vn\}$, где V_i, $i=\overline{1,n}$ номера конечных вершин транзитных потоков, которые расположены на восточной границе региона. Различные сочетания «входов» и «выходов» определяют транзитные потоки $\{Z_iV_j\}$ (где $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$) для выбранного направления (ZV) (Рис.1.а).

Характеристики участков транспортной сети, заданной графом (G, N), определены при помощи следующих матриц.

Матрица распределения начального потока $X^0=\|x^0_{ij}\|$ содержит элементы x^0_{ij} (i,j=1,..,N), каждый из которых определяют величину начального транзитного потока на ветви транспортной сети от i-того узла к j-тому.

Матрица пропускных способностей $\Sigma(t)=\|c_{ij}(t)\|$ содержит элементы $c_{ij}(t)$ ($t=1, ..,T_m$, T_m- время моделирования; i,j=1,..,N), которые определяют пропускную способность дороги транспортной сети от i-того узла к j-тому, изменяющуюся во времени в зависимости от износа участка дороги и параметров внешней среды. Значения матрицы $\Sigma(t)=\|c_{ij}(t)\|$ обновляются на каждом шаге и поступают из имитационной модели износа участков транспортной сети [4]. Если $c_{ij}=0$, то в транспортной сети i-тый узел не связан с j-тым узлом.

Матрица расстояний $L=\|l_{ij}\|$ содержит элементы l_{ij} $(i,j=1,..,N)$, которые определяют расстояние в транспортной сети от i-того узла к j-тому. Если $l_{ij}=0$, то в транспортной сети i-тый узел не связан с j-тым узлом.

Матрица стоимостей $Q=\|q_{ij}\|$ содержит элементы $q_{ij}(t)$ $(i,j=1,..,N)$, которые определяют стоимость проезда единицы потока в транспортной сети от i-того узла к j-тому. Если $q_{ij}=0$, то в транспортной сети i-тый узел не связан с j-тым узлом.

Матрица $T=\|t_{ij}\|$ содержит элементы t_{ij}, которые задаются отношением $t_{ij}=\dfrac{l_{ij}}{x_{ij}^{0}}$, при $(i,j=1,..,N)$ и определяют время движения транспортных единиц потока от i-ого узла к j-тому.

Матрица внутренних потоков $X^{пр} = \| X^{пр}_{ij}\| = \|F_{ij}(\tau)\|$ содержит элементы $X^{пр}_{ij}$ $(i,j=1,..,N)$, которые определяют величину внутреннего потока на ветви транспортной сети от i-того узла к j-тому. Здесь $F_{ij}(\tau)$ – функция распределения величины внутреннего потока на ветви из i-того узла транспортной сети в j-тый

Из-за влияния внутренних потоков на пропускные способности ветвей транспортной сети рассчитывается матрица $\tilde{\Sigma}(t)=\Sigma(t)-X^{пр}$ $(t=1, ..,T_m)$. При последующих расчетах вместо матрицы пропускных способностей $\Sigma(t)$ используется матрица $\tilde{\Sigma}(t)$.

Для каждого из потоков $\{Z_iV_j\}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ по отдельности транспортная задача решается при помощи модифицированного алгоритма Форда–Фалкерсона [2].

В результате для каждого из потоков Z_iV_j, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ получаем следующие выходные характеристики: величину максимального потока φ^{max}_{ij} направления Z_iV_j, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$; величину эффективности Φ_{ij} максимального потока направления Z_iV_j, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$; распределение транспортных потоков в сети $X^{ij}=\| X^{ij}_{kl}\|$, $k,l=1,..,N$ для направления Z_iV_j, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

2 Алгоритм поиска интегрального максимального потока транспортной сети в заданном направлении

С целью нахождения интегрального максимального потока транспортной сети в заданном направлении для каждого временного интервала составляются матрицы величин максимальных потоков и эффективностей этих потоков, элементами которых являются значения максимальных потоков и эффективностей потоков по каждому сочетанию входа и выхода. Матрицу величин потоков обозначим $\varphi = \|\varphi^{max}_{ij}\|$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Матрицу эффективностей потоков обозначим $\Phi = \|\Phi_{ij}\|$, i = ; $j=\overline{1,n}$. Полученные матрицы нормируются по максимальному элементу:

$$\varphi^* = \|\varphi^*_{ij}\| = \left\| \frac{\varphi}{\max\limits_{ij}\varphi} \right\|,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\quad \Phi^* = \|\Phi^*_{ij}\| = \left\| \frac{\Phi}{\max\limits_{ij}\Phi} \right\|,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

В результате все элементы матриц φ^*, Φ^* удовлетворяют неравенствам $0\le\varphi^*_{ij}\le1$; $0\le\Phi^*_{ij}\le1$. В прямоугольной системе координат $\varphi^*0\Phi^*$ отмечаем точки $(\varphi^*_{ij};\Phi^*_{ij})$. Причем, в силу того, что элементы матриц нормированы по максимальному элементу, все точки будут находиться в пределах единичного квадрата, левый нижний угол которого совмещен с началом координат.

Все точки единичного квадрата сравниваются при помощи некоторой метрики. Составляется список потоков, в котором все элементы ранжируются от «наихудшего» по эффективности к «наилучшему» в соответствии с данными единичного квадрата. Одновременно составляется матрица достижимости $D=\|d_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j= \overline{1,n}$, где $d_{ij}=1$, если есть поток из i-того входа в j-тый выход и $d_{ij}=0$, если потока из i-того входа в j-тый выход нет.

Список просматривается снизу вверх, то есть начиная с потока, наихудшего по эффективности. Текущий поток исключаются из списка, если его исключение не оставляет ни одну начальную вершину без исходящего потока и не оставляет ни одну конечную вершину без входящего потока. По исключении из списка потока, который идет из i-того входа в j-тый выход модифицируется матрица достижимости D, в которой на пересечении i-той строки и j-того столбца единица заменяется нулем.

Таким образом, получаем, что текущий поток из i-того входа в j-тый выход исключается из списка в том случае, если после его исключения и модификации матрицы достижимости D, в i-той строке будет хотя бы одна единица и в j-том столбце так же будет хотя бы одна единица. Если же исключение потока ведет к тому, что в матрице достижимости i-тый столбец, либо j-тая строка будут состоять из нулей, то поток из списка потоков не исключается, и в списке переходим к следующему потоку.

В результате отбраковки потоков получаем множество наиболее эффективных потоков $ZV^э=\{Z_iV_j\}$, таких что каждый из «входов» связан транзитным потоком по крайней мере с одним «выходом». Т.е. каждый из «входов» транспортной сети имеет, по крайней мере, один исходящий из него поток, а каждый из «выходов» сети имеет по крайней мере один входящий в него поток (Рис.1.b).

Для множества этих потоков $ZV^э$ применяется принцип суперпозиции, соответствующие им матрицы распределения потоков $X^{ij}=\| X^{ij}_{kl}\|$ суммируются, образуя матрицу интегрального транзитного потока по выбранному направлению. Причём задача суперпозиции потоков решается таким образом, чтобы в сети могли одновременно существовать все оставшиеся потоки из множества $ZV^э$.

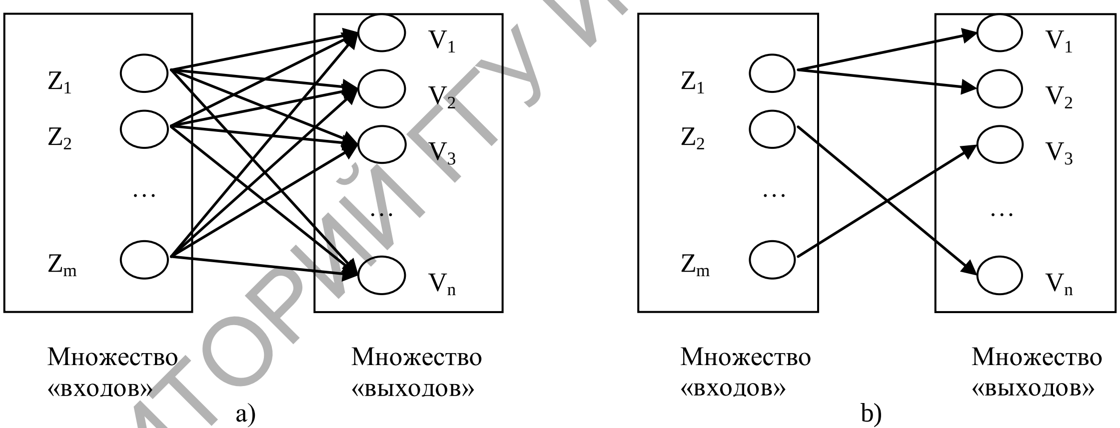

Рисунок – 1a) Сочетания “входов” и “выходов”, определяющие все транзитные потоки; b) Сочетания “входов” и “выходов”, определяющие наиболее эффективные транзитные потоки

Далее составляется общее множество дуг $DN=\{<d_{ij},n>\}$ следующим образом – элементом множества является пара: насыщенная дуга и число $<d_{ij}, n>$, здесь d_{ij} – дуга из i-того узла в j-тый, а n – величина, показывающая, насколько суммарный поток для этой дуги превышает ее пропускную способность. Суммарный поток описывается матрицей интегрального транзитного потока по выбранному направлению, которая является суммой матриц потоков X^{ij} из множества $ZV^э$.

Из множества DN насыщенных дуг выбирается элемент, у которого величина n максимальная. Этот элемент списка $<d_{ij},n1>$ описывает дугу, для которой величина n1 суммарного потока, построенного из оставшихся транзитных потоков, больше всего превышает пропускную способность дуги. Поэтому в каждом из транзитных потоков множества DN, где встречается эта выбранная дуга, необходимо уменьшить поток в n1 раз для того, чтобы после выполнения суперпозиции оставшихся потоков дуга d_{ij} оказалась насыщенной. Уменьшение производим для каждого потока $Z_{i`}V_{j`}$ по всем путям, которые насыщали рассматриваемую дугу в ходе выполнения алгоритма Форда-Фалкерсона, пропорционально их вкладу в насыщение дуги. После этого множество DN перестраивается в силу того, что было произведено уменьшение каждого из транзитных потоков, что повлекло изменение величин n для ветвей сети, которые были задействованы при уменьшении потока.

Описанные действия выполняются до тех пор, пока в множестве DN находится хотя бы один элемент, у которого n больше нуля. Как только у всех элементов множества DN величины n станут отрицательными либо равными нулю, это будет означать, что после суперпозиции потоков величины результирующего суммарного потока на дугах не будут превышать их пропускные способности, а следовательно, дальнейшее уменьшение потоков прекращается. В качестве решения задачи берется результирующий суммарный поток.

В результате выполнения алгоритма суперпозиции потоков в соответствии с теоремой Форда-Фалкерсона [1] величина потока на любом разрезе сети будет максимальной, а сам суммарный поток будет состоять из уменьшенных транзитных потоков.

Заключение

Таким образом, задача о поиске максимального потока может решаться для транспортных сетей со множеством входов и множеством выходов. При этом, предложенный метод позволяет определить интегральный максимальный поток для нескольких потоков и его распределение в заданном направлении, учитывая случайный характер пропускных способностей, изменяющие свою величину в зависимости от внешних воздействий на сеть. Причем результирующий поток будет не просто является максимальным потоком в транспортной сети, но и лучшим по эффективности.

Abstract. The paper presents the method which permits to determine the peak integral flow for some flows and its distribution for a determined direction.

Литература

1. Жогаль, С. И. Задачи и модели исследования операций. Ч. 1. Аналитические модели исследования операций: Уч. пособие. / С. И. Жогаль, И. В. Максимей // Гомель: БелГУТ, 1999. – 109 с.

2. Гируц, П. В. Метод имитации объектов графовой структуры / П. В. Гируц // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – №4 (37). – 2006. – С.17–20.

3. Максимей, И. В. Имитационное моделирование на ЭВМ / И. В. Максимей // Москва: Радио и связь, 1983. – 232 с.

4. Сукач, Е. И. Применение имитационного моделирования для исследования динамики транспортных потоков региона / Е. И. Сукач // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 2006. – №4 (37). – С.17–20.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 2.05.07