Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О p-сверхразрешимых нормальных подгруппах конечных групп

Е.А.Молокова

Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и определения см. в [1]. Следуя [2], скажем, что элемент x является $Q\mathfrak{U}$-центральным в группе G, если G обладает таким циклическим главным фактором R/S, что $x \in R\backslash S$.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$, P — силовская p-подгруппа из H. Если каждый элемент из $P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$ является $Q\mathfrak{U}$-центральным в G, то H p-сверхразрешима и каждый ее нефраттиниев G-главный p-фактор имеет порядок p.*

Доказательство. Пусть каждый элемент из $P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$ $Q\mathfrak{U}$-централен в G. Докажем, что H p-сверхразрешима и каждый ее нефраттиниев G-главный p-фактор имеет порядок p. Положим $R = O_{p'}(H)$. Рассмотрим изоморфное отображение $\varphi : P \rightarrow PR/R$. Очевидно,

$$(P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G)))^{\varphi} \supseteq (PR/R)\backslash(\Phi(PR/R) \cup \Phi(G/R)).$$

Возьмем элемент $yR \in (PR/R)\backslash(\Phi(PR/R) \cup \Phi(G/R))$, где $y \in P$. Тогда $y \in \in P\backslash(\Phi(P) \cup \Phi(G))$. Согласно условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой что $y \in S\backslash L$. Очевидно, что $SR/LR \cong S/S \cap LR = S/L(S \cap R)$. Так как S/L — главный фактор, то $L(S \cap R)$ совпадает либо с S, либо с L. Пусть $L(S \cap R) = S$. Так как $S \cap R$ — p'-подгруппа, то все p-элементы из $L(S \cap R)$ содержатся в L. Следовательно, из $L(S \cap R) = S$ следует, что $y \in L$. Получаем противоречие. Итак, $L(S \cap R) = L$. Отсюда следует, что SR/LR изоморфна S/L. Тогда очевидно, что $y \in SR\backslash LR$. Итак, если $R \neq 1$, то по индукции H/R p-сверзразрешима и каждый ее G/R-главный p-фактор циклический. Но тогда H также p-сверхразрешима и каждый ее G-главный p-фактор циклический. Таким образом, будем считать, что $R = O_{p'}(H) = 1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-сверхразрешимых групп. Рассмотрим $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G. Порядок каждого G-главного фактора между $HG^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ либо равен p, либо не делится на p. Тогда ясно, что порядок каждого G-главного фактора между H и $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ также либо равен p, либо не делится на p. Пусть T — нормальная подгруппа из G наименьшего порядка со следующим свойством: T содержится в $H \cap G^{\mathfrak{F}}$, а каждый нефраттиниев G-главный pd-фактор между $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ и T имеет порядок p. Очевидно, T не содержится в $\Phi(G)$. Пусть $K/T \cap \Phi(G)$ — главный фактор группы G такой, что $K/T \cap \Phi(G) \subseteq T/T \cap \Phi(G)$. По теореме 4.1 из [1], p делит порядок $K/T \cap \Phi(G)$. Тогда по следствию 8.12 из [1] $K/T \cap \Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный нефраттиниев главный фактор группы G. В дальнейшем будем считать, что K — нормальная подгруппа группы G наименьшего порядка, удовлетворяющая следующим условиям: $K \subseteq T$ и $K/K \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G. Введем обозначение: $\Phi = K \cap \Phi(G)$. По теореме А.9.13 из [3], каждый G-главный ряд группы K имеет только один нефраттиниев G-главный фактор, и все нефраттиниевы G-главные факторы группы K G-изоморфны. Пусть D/Φ — минимальное добавление к K/Φ в G/Φ. Очевидно, можно считать, что P содержит некоторую силовскую p-подгруппу $(H \cap D)_p$ группы $H \cap D$. Значит, $P = (H \cap D)_p K_p$, где K_p — силовская p-подгруппа из K. По теореме 12.4 из [1], $(H \cap D)_p/\Phi$ не содержит K_p/Φ. Следовательно, существует такой элемент $x \in P$, что $x\Phi \in (K_p/\Phi)\backslash\Phi(P/\Phi)$. Поскольку $\Phi(P)\Phi/\Phi$ содержится в $\Phi(P/\Phi)$, то $x \notin \Phi(P)$ и

$x \notin \Phi(G)$. По условию, существует циклический главный фактор S/L группы G, такой что $x \in S \backslash L$. Очевидно, что SK/LK G-изоморфна группе $S/L(S \cap K)$, и $L(S \cap K)$ совпадает либо с L, либо с S.

Так как $x \in (S \cap K) \backslash L$, то получаем $S = L(S \cap K)$. Итак, S/L G-изоморфна $S \cap K/L \cap K$. Более того, $x \in S \cap K$ и $x \notin L \cap K$. Если фактор $S \cap K/L \cap K$ нефраттиниев, то он G-изоморфен K/Φ, и мы получаем противоречие. Итак, $S \cap K/L \cap K$ — фраттиниев главный фактор. Используя теорему A.9.13 из [3], опять приходим к противоречию. Итак, $L \cap K \subseteq \Phi$. Поскольку фактор $S \cap K/L \cap K$ фраттиниев, то мы получаем следующее: $S \cap K \subseteq \Phi$. Но это противоречит тому, что x принадлежит $S \cap K$, но не принадлежит Φ. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 2. *Пусть p — простое число, $H \trianglelefteq G$ и H_p абелева. Предположим, что каждая циклическая подгруппа, дополняемая в H_p, порождается $Q\mathfrak{U}$-центральным в G элементом. Тогда H p-сверхразрешима и каждый ее G-главный p-фактор имеет порядок p.*

Из теоремы 1 вытекает основной результат работы [4]. Следствием теоремы 2 является теорема С.Н.Черникова [5].

Abstract. An element x of a finite group G is called $Q\mathfrak{U}$-central is there exists a cyclic chief factor H/K of G such that $x \in H \backslash K$. It is proved that a normal subgroup H of a finite group G is p-supersoluble if every element in $H_p \backslash (\Phi(H_p) \cup \Phi(G))$ is $Q\mathfrak{U}$-central in G.

Литература

1. 1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. Х. А. Аль-Шаро, Л. А. Шеметков, *О подгруппах простого порядка в конечной группе*, Укр. мат. ж. **54**, № 6 (2002), 745–752.

3. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

4. Е. А. Молокова, *Характеризация конечных p-сверхразрешимых групп*, Известия Гомельского госуниверситета им. Ф.Скорины, 1(16) (2003), 116–117.

5. С. Н. Черников, *Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами*, В кн.: *Группы, определяемые свойствами системы подгрупп*, Киев, Ин-т мат-ки АН УССР, 1979, с. 3–15.

Гомельский технический
университет им П.О.Сухого

Поступило 25.10.04