Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(27), 2004

УДК 517.925

Линейные уравнения с четными решениями

С. П. Дубровская

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = a_1(t)y + a_2(t)\dot{y} + \ldots + a_n(t)y^{(n-1)}, \qquad (1)$$

где $a_i(t)$ – непрерывные n раз дифференцируемые на некотором интервале вида $(-\alpha;\alpha)$ функции.

Наличие временных симметрий у решений дифференциального уравнения облегчает качественное исследование этого уравнения. В настоящей статье решается вопрос о существовании четных решений у линейного дифференциального уравнения и об их количестве.

Вопрос о наличии четных решений у уравнения (1) сводится к вопросу о наличии решений с первой четной компонентой у системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ x_n = a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 + \ldots + a_n(t)x_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a_1 + (-1)^{n+1}\overline{a}_1 & a_2 + (-1)^n \overline{a}_2 & \ldots\ldots & a_{n-1} - \overline{a}_{n-1} & a_n + \overline{a}_n \\ A_{21} + (-1)^n \overline{A}_{21} & A_{22} + (-1)^{n+1}\overline{A}_{22} & \ldots\ldots & A_{2,n-1} + \overline{A}_{2,n-1} & A_{2n} - \overline{A}_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n1} + \overline{A}_{n1} & A_{n2} - \overline{A}_{n2} & \ldots\ldots & A_{n,n-1} + (-1)^n \overline{A}_{n,n-1} & A_{nn} + (-1)^{n+1}\overline{A}_{nn} \end{vmatrix},$$

где A_{ij} определяются следующими формулами

$$A_{1j} = a_j,\ A_{i+1,1} = \dot{A}_{i1} + a_1 A_{in},\ A_{i+1,j} = \dot{A}_{ij} + A_{i,j-1} + a_j A_{in},$$
$$\overline{A}_{ij} = A_{ij}(-t),\ \overline{a}_j = a_j(-t).$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если функция* $\Delta(t) \equiv 0$, *то четными являются те и только те решения уравнения (1), начальные данные которых удовлетворяют линейной алгебраической системе*

$$\begin{cases} x^{(i)}(0) = 0, i = 0, 2, \ldots, 2\left[\dfrac{n}{2}\right], \\ A_{11}(0)y(0) + A_{12}(0)\dot{y}(0) + \ldots + A_{1n}(0)y^{(n-1)}(0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}(0)y(0) + A_{n2}(0)\dot{y}(0) + \ldots + A_{nn}(0)y^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $y(t)$ уравнения (1), определенное на симметрично интервале $(-\alpha;\alpha)$. В силу построения системы (2), решению $y(t)$ уравнения (1) соответствует некоторое решение $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))^T$ системы (2), также определенное на интервале $(-\alpha;\alpha)$. Введем функцию $V(t)=x_1(t)-x_1(-t)$.
Ее производные

$$V^{(p)}(t)=[A_{p1}x_1+A_{p2}x_2+...+A_{pn}x_n+(-1)^{p+1}(\overline{A}_{p1}\overline{x}_1+\overline{A}_{p2}\overline{x}_2+...+\overline{A}_{pn}\overline{x}_n)]_{\substack{x=x(t)\\ \overline{x}=x(-t)}}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1-\overline{x}_1=0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n+(-1)^n\overline{x}_n=0, \\ A_{11}x_1+A_{12}x_2+...+A_{1n}x_n+\overline{A}_{11}\overline{x}_1+\overline{A}_{12}\overline{x}_2+...+\overline{A}_{1n}\overline{x}_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+...+A_{nn}x_n+(-1)^{n+1}(\overline{A}_{n1}\overline{x}_1+\overline{A}_{n2}\overline{x}_2+...+\overline{A}_{nn}\overline{x}_n)=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Используя первые n соотношений, получаем систему

$$\begin{cases} (A_{11}+(-1)^{n+1}\overline{A}_{11})x_1+(A_{12}+(-1)^n\overline{A}_{12})x_2+...+(A_{1n}+\overline{A}_{1n})x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A_{n1}+\overline{A}_{n1})x_1+(A_{n2}-\overline{A}_{n2})x_2+...+(A_{nn}+(-1)^{n+1}\overline{A}_{nn})x_n=0. \end{cases} \qquad (3a)$$

Определитель этой системы равен $\Delta(t)\equiv 0$. Следовательно, система (3а), а значит, и система (3), имеет бесконечно много решений. Т.е. при выполнении первых $2n-1$ соотношений системы (3), последнее обращается в верное тождество.

Таким образом было показано, что при выполнении условий теоремы 1, $A_{p1}x_1+A_{p2}x_2+...+A_{pn}x_n+(-1)^{p+1}(\overline{A}_{p1}\overline{x}_1+\overline{A}_{p2}\overline{x}_2+...+\overline{A}_{pn}\overline{x}_n)\overset{t,x,\overline{x}}{\equiv}0$. А это означает, что $V^{(2n-1)}(t)\equiv 0$. Следовательно, функция $V(t)=c_0+c_1t+...+c_{2n-2}t^{2n-2}$. Из условий теоремы и определения функции $V(t)$, следует, что $V^{(p)}(0)=0$, $\forall p\in\overline{0,2n-2}$. Поэтому все c_p, $\forall p\in\overline{0,2n-2}$, равны нулю, а $V(t)\equiv 0$. Т.е. $x_1(t)-x_1(-t)\equiv 0$. Следовательно, $y(-t)\equiv y(t)$ $\forall i\in\overline{1,k}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если хотя бы в одной точке $t_0\in(-\alpha;\alpha)$ верно неравенство $\Delta(t_0)\neq 0$, то лишь нулевое решение уравнения (1) является четным.*

Доказательство. В силу условия теоремы 2 существует окрестность точки t_0 $O(t_0)$ такая, что $\forall t_0\in O(t_0)$ выполняется неравенство $\Delta(t)\neq 0$. Следовательно, в окрестности $O(t_0)$ система (3а), а следовательно и система (3), имеет единственное решение, причем это решение $x\equiv 0$. И в силу продолжимости решения линейной системы получаем, что $\forall t\in(-\alpha;\alpha)$ лишь нулевое решение обладает указанным свойством.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $a_i(-t)=(-1)^{n+i+1}a_i(t)$, то четными являются только решения со следующими начальными данными $x^{(2i)}(0)=0$, $i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]}$.*

Следствие 2. *Пусть для уравнения*

$$\ddot{y} = ay + b\dot{y} \tag{4}$$

где $a(t), b(t)$ непрерывно дифференцируемые функции, определенные на симметричном интервале $(-\alpha;\alpha)$, функция

$$\varphi(t) = aB + Ab - a\overline{B} + b\overline{A}$$

где $A = \dot{a} + ab$, $B = \dot{b} + a + b^2$, является нечетной, тогда решения уравнения (4), начальные данные которых удовлетворяют условию $\dot{y}(0) = 0$, являются четными.
Если же $A(0) \neq 0$, то лишь тривиальное решение $y \equiv 0$ является четным.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\ddot{y} = -2\dot{y}\sin t - (\cos t + \sin^2 t)y$.

Так как $a(t) = \cos t + \sin^2 t$ – четная функция, а $b(t) = 2\sin t$ нечетная, то согласно следствию 1, четными являются решения с начальными данными $y(0) = c$, $c \in \mathbf{R}$, $\dot{y}(0) = 0$.
Пример 2. Уравнение $\ddot{y} = y\sin t - 2\dot{y}\,\mathrm{tg}\,t$ не имеет четных решений, за исключением тривиального, так как $A(0) = \left[\cos t - 2\,\mathrm{tg}\,t\sin t\right]_{t=0} = 1 \neq 0$.

Abstract. Conditions of linear equation even solutions are discovered this article.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 12.04.04