Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. П. Лемешев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Практическое пособие

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 514.7(076)
ББК 22.16я73
Л442

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук В. Н. Семенчук,
канд. физ.-мат. наук Т. И. Васильева

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Лемешев, В. П.
Л442 Высшая математика. Дифференциальное исчисление. Исследование функций : практическое пособие / В. П. Лемешев ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 44 с.
ISBN 978–985–577–367–3

В практическом пособии изложены вопросы дифференциального исчисления, связанные с исследованием свойств функций и построением их графиков: теоремы Ролля, Коши, Лагранжа и др. Показано их практическое применение в высшей математике.
Адресовано студентам экономических специальностей вуза.

УДК 514.7(076)
ББК 22.16я73

ISBN 978–985–577–367–3

© Лемешев В. П., 2017
© Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2017

Оглавление

Предисловие

Практическое пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей дневной и заочной форм обучения. Оно полностью посвящено вопросам дифференциального исчисления, связанным с исследованиями свойств функций и построением их графиков.

В издании подробно изложены основные положения теории: теоремы Ролля, Коши, Лагранжа, и показано их применение для изучения таких свойств функций, как монотонность, существование экстремумов, выпуклость, направления асимптот, взаимосвязь с обратными функциями. Как следствия рассматриваются ряды Тэйлора и правила Лопиталя.

Материал практического пособия рассматривается как базовый для изучения студентами таких разделов, как интегральное исчисление, «Дифференциальные уравнения и ряды», которые составляют основное содержание курса высшей математики во втором семестре. Указанные темы являются основой для подготовки к экзамену по высшей математике за первый курс.

Изложение материала компактно и сопровождается рассмотрением соответствующих примеров, иллюстрирующих все теоремы и их следствия.

1 Производная и дифференциал

1.1 Производная функции и ее геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$ и точка $x_0 \in (a; b)$.

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется пределом отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, то есть

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой на этом интервале*. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют *приращением функции* и обозначают Δy.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение. По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

1.2 Геометрический смысл производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, непрерывная в некоторой окрестности точки x_0 (рисунок 1). Построим на осях координат точки $x_0 + \Delta x$ и $f(x_0 + \Delta x)$. Тогда длина $M_0A = \Delta x$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = AM,$$

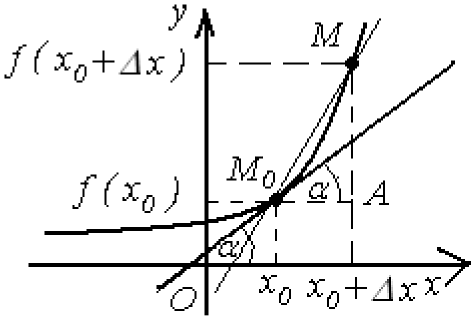


Рисунок 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{AM}{M_0A} = \operatorname{tg} \angle MM_0A.$$

При $\Delta x \to 0$ точка M стремится к точке M_0 и в пределе совпадает с ней. Угол $\angle MM_0A$ стремится к углу наклона касательной α и в пределе совпадает с ним. Секущая MM_0 превращается в касательную к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Таким образом,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона к оси Ox касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке. Это является геометрическим смыслом производной.

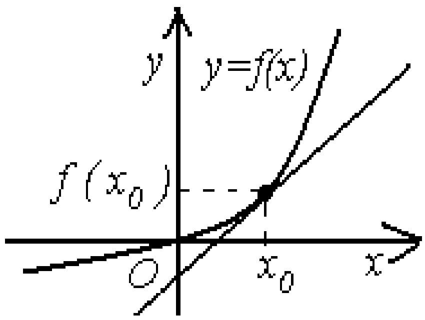


Рисунок 2

Так как общее уравнение касательной в точке x_0 имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$y_0 = f(x_0), k = y'(x_0) = f'(x_0),$$

то окончательно уравнение касательной (рисунок 2) можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 2. Написать уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 4$ в точке $x = 2$.

Решение. Так как $x_0 = 2$, то вычислим значения

$$f(x_0) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 6, f'(x) = (3x^2 - 5x + 4)' = 6x - 5,$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7.$$

Окончательно получим $y - 6 = 7(x - 2)$ или $y = 7x - 8$.

1.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции одной переменной

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$дифференцируема в некоторой точке x_0. Тогда существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи предела и бесконечно малой имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0) + \alpha(x) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Теорема доказана.

Обратная теорема неверна. Непрерывная функция может не иметь производной, что показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть $y = |x|$. Тогда в точке $x_0 = 0$ функция непрерывна, но не имеет производной. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Пределы справа и слева не совпадают, следовательно, производной в точке $x_0 = 0$ не существует.

1.4 Основные формулы и правила дифференцирования функций

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в некотором интервале $(a; b)$.

Теорема 2. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций, т. е.*

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Доказательство.

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\big) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big) \pm \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).$$

Теорема 3. *Числовой множитель (константу) можно выносить за знак производной, то есть*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Доказательство.

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x+\Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot (f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} =$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x).$$

Теорема 4. *Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то* есть

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Доказательство.

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Теорема 5. *Производная частного двух функций* $\frac{f(x)}{g(x)}$, *если* $g(x) \neq 0$, *равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя. То есть справедлива формула*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}g(x) - f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема 6. *Производная константы равна нулю, то есть* $c' = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x) = c$, тогда

$$c' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

1.4.1 Таблица основных производных

Степенные функции

$$1)\ (x^n)' = nx^{n-1};\ 2)\ x' = 1;\ 3)\ (x^2)' = 2x;\ 4)\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$5)\ \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Показательные функции

1) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; 2) $(e^x)' = e^x$.

Логарифмические функции

1) $\log_a' x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; 2) $ln' x = \dfrac{1}{x}$.

Тригонометрические функции

$$1)\ \sin' x = \cos x;\ 2)\ \cos' x = -\sin x;\ 3)\ tg' x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$4)\ \text{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x};\ 5)\ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ 6)\ \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$7)\ \text{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2};\ 8)\ \text{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

1.5 Дифференциал и его геометрический смысл

1.5.1 Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, ее можно представить в виде суммы

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$, отсюда $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$. Таким образом, Δy является суммой двух бесконечно малых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha(x) \cdot \Delta x$. Величину $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *главной частью приращения функции* Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения в этой точке. Обозначается символами

$$dy,\ df(x),\ dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Так как для функции $y = x$ справедливы равенства

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x,$$

то $\Delta x = dx$ и $dy = y'dx$. Отсюда следует выражение производной через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций

$$y = 2x^2 + 1 \text{ и } y = \sin x.$$

Решение. Для первой функции $dy = (2x^2 + 1)'dx = 4xdx$, для второй $dy = \cos x dx$.

1.5.2 Геометрический смысл дифференциала

Пусть дана некоторая (рисунок 3) дифференцируемая в точке x функция

$$y = f(x).$$

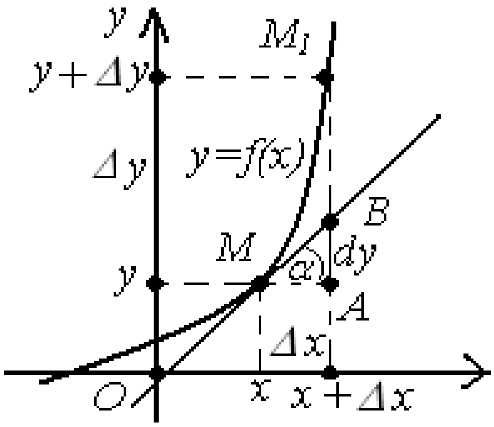


Рисунок 3

По построению

$$AM = \Delta x, AM_1 = \Delta y.$$

Тогда из прямоугольного треугольника MBA следует

$$\text{tg}\alpha = \frac{AB}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$AB = \text{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x = dy.$$

Таким образом, *дифференциал функции в точке* x *равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке при приращении аргумента* Δx. В этом заключается геометрический смысл дифференциала.

1.6 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Пусть дана функция $y = f(x)$. Тогда

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$. Отсюда $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$, и

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

В итоге получаем формулу приближенного вычисления функции $y = f(x)$

$$y \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 5. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{9}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Пусть $x_0 = 8, x = 9$. Так как

$$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2, y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12},$$

$$\text{то } \sqrt[3]{9} = y(9) \approx 2 + \frac{1}{12}\ 9 - 8\ = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08.$$

1.7 Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ некоторая функция, где $u = \varphi(x)$ также функция, тогда выражение $y = f\big(\varphi(x)\big)$ является функцией, которая называется *сложной функцией от переменной* x. Переменная u в этом случае называется *промежуточной*.

Теорема 7. *Если функция* $u = \varphi(x)$ *имеет производную* u'_x *в точке* x, *а функция* $y = f(u)$ *имеет производную* y'_u *в точке* $u = \varphi(x)$, *то сложная функция* $y = f\big(\varphi(x)\big)$ *имеет производную* y'_x *в точке* x, *которая находится по формуле* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Доказательство. Пусть

$$y'_u = \lim_{\Delta u \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Отсюда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(u),$$

или

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(u) \cdot \Delta u,$$

где $\alpha(u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Функция $u = \varphi(x)$ по условию имеет производную в точке x

$$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x + \beta(x),$$

или

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta(x) \cdot \Delta x,$$

где $\beta(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta(x) \cdot \Delta x) + \alpha(u)(u'_x \cdot \Delta x + \beta(x) \cdot \Delta x) =$$

$$= y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta(x) \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha(u) \cdot \Delta x + \alpha(u) \cdot \beta(x) \cdot \Delta x.$$

Разделим обе части на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + y'_u \cdot \beta(x) + u'_x \cdot \alpha(u) + \alpha(u) \cdot \beta(x) = y'_u \cdot u'_x + \gamma(x),$$

где

$$\gamma(x) = y'_u \cdot \beta(x) + u'_x \cdot \alpha(u) + \alpha(u) \cdot \beta(x)$$

и $\gamma(x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$. По теореме (обратной к теореме) о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x = y'_x.$$

Рассмотрим примеры на применение теоремы 7.

Пример 6. Найти производную функции

$$y = \sin(x^2).$$

Решение. В нашем случае $y = \sin u$, $u = x^2$. По теореме 6 имеем

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^2)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos\,(x^2).$$

Пример 7. Найти производную функции

$$y = \ln^3 x.$$

Решение. В нашем случае $y = u^3$, $u = \ln x$. По теореме 6 имеем

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (u^3)'_u \cdot (\ln x)'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x}.$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y = \sqrt{1 + \cos 5x}.$$

Решение. В нашем случае $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + \cos v$, $v = 5x$. По теореме 7 имеем

$$y' = y'_u \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \left(\sqrt{u}\right)'_u \cdot (1 + \cos v)'_v \cdot (5x)'_x =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}(-\sin v) \cdot 5 = -\frac{5\sin 5x}{2\sqrt{1 + \cos 5x}}.$$

1.8 Производная обратной функции

Теорема 8. *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке и*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'}.$$

Доказательство. Пусть для функции $y = f(x)$ и ее обратной $x = \varphi(y)$ выполнены все условия теоремы. Дадим аргументу y обратной функции приращение $\Delta y \neq 0$. В силу монотонности исходной функции, соответствующее приращение будет так же не равно нулю, то есть $\Delta x \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции, так же $\Delta x \to 0$ и так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

то имеем

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример 9. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Ее обратная функция $x = y^2$. Тогда по теореме 7

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2 Основные теоремы дифференциального исчисления

2.1 Понятие о производных высших порядков

Пусть дана функция $y = f(x)$. Ее производная $y' = f'(x)$ так же является функцией от x и называется производной первого порядка. Если $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается $y'' = (f'(x))' = f''(x)$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $n-1$-го порядка

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Пример 10. Пусть $y = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$. Найти производную 5-го порядка $y^{(5)}$.

Решение. Найдем последовательно производные до 5-го порядка.

$$y' = 5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 6x - 4,$$
$$y'' = 20x^3 + 36x^2 - 12x + 6,$$
$$y''' = 60x^2 + 72x - 12,$$
$$y^{(4)} = 120x + 72,$$
$$y^{(5)} = 120.$$

Пример 11. Найти производную n-го порядка $y^{(n)}$ функции

$$y = \frac{1}{x}.$$

Решение. Находим последовательно производные

$$y' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, y'' = 2x^{-3}, y''' = -6x^{-4}, y^{(4)} = 24x^{-5}, \ldots.$$

Продолжая этот процесс дальше, замечаем следующую закономерность

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}.$$

2.2 Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производных функций целесообразно сначала прологарифмировать исходную функцию. Особенно это эффективно, когда исходная функция разлагается на достаточно большое число сомножителей или является одновременно степенной и показательной, то есть имеет вид $y = f(x)^{g(x)}$.

Пример 12. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2 - 3) \cdot \sqrt[5]{(2x - 3)^3}}{(4x - 1)^3}.$$

Решение. Прологарифмируем функцию y

$$\ln y = \ln(x^2 - 3) + \frac{3}{5}\ln(2x - 3) - 3\ln(4x - 1).$$

Продифференцируем обе части этого равенства

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2 - 3} + \frac{3 \cdot 2}{5(2x - 3)} - \frac{12}{4x - 1},$$

Отсюда получаем

$$y' = y\cdot\left(\frac{2x}{x^2-3}+\frac{6}{5(2x-3)}-\frac{12}{4x-1}\right)=$$

$$=\frac{(x^2-3)\cdot\sqrt[5]{(2x-3)^3}}{(4x-1)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2-3}+\frac{6}{5(2x-3)}-\frac{12}{4x-1}\right).$$

Пример 13. Найти производную функции

$$y=(x^2+1)^{\sin x}.$$

Решение. Прологарифмируем функцию y

$$\ln y=\ln(x^2+1)^{\sin x}=\sin x\cdot\ln(x^2+1).$$

Продифференцируем обе части этого равенства

$$\frac{y'}{y}=(\sin x)'\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\cdot\left(\ln(x^2+1)\right)'=$$

$$=\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}.$$

Отсюда получаем

$$y'=y\cdot\left(\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right)=$$

$$=(x^2+1)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right).$$

2.3 Дифференциалы высших порядков

Так как дифференциал функции $dy=f'(x)dx$ является также функцией, то от него также можно находить дифференциал.

Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка) функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее дифференциала. Обозначается как

$$d^2y=d(dy).$$

Так как величина $dx=\Delta x$ не зависит от x и является при дифференцировании по x постоянной, то

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx =$$
$$= f''(x)(dx)^2.$$

Таким образом,

$$d^2y = f''(x)dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^ny = f^n(x)dx^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.4 Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 9 (теорема Ролля). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная функции равна нулю, то есть $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она достигает на нем своего наибольшего (M) и наименьшего (m) значений. Если $M = m$, то $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и $f'(x) = 0$ для любой точки x из отрезка $[a;b]$. Пусть $M > m$ и $f(c) = M$, $c \in (a;b)$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ верно неравенство $f(c) \geq f(x)$ и

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Так как всегда $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, то при $\Delta x > 0$, получаем $f'(c) \leq 0$, а при $\Delta x < 0$, получаем $f'(c) \geq 0$. Но функция $f(x)$ дифференцирована в точке c, следовательно ее пределы слева и справа должны совпадать. Это возможно лишь в случае $f'(c) = 0$. Аналогично доказывается и случай когда $f(c) = m$.

Замечание. Теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется такая точка, в которой касательная к графику будет параллельна оси Ox (рисунок 4).

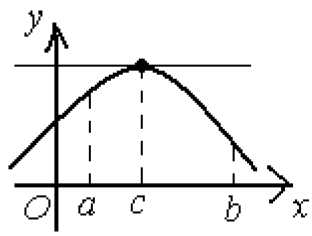


Рисунок 4

Теорема 10 (теорема Коши). *Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доказательство. Заметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы такая точка c, что $\varphi'(c) = 0$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\big(\varphi(x) - \varphi(a)\big).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, так как является линейной комбинацией функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, кроме того

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\big(\varphi(a) - \varphi(a)\big) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big) = f(b) - f(a) -$$

$$-\big(f(b) - f(a)\big) = 0.$$

По теореме Ролля найдется такая точка $x = c \in (a; b)$, что $F'(c) = 0$. А так как

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x),$$

то

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема 11 (теорема Лагранжа). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$,что*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = x$, тогда

$$\varphi(b) - \varphi(a) = b - a, \varphi'(x) = 1, \varphi'(c) = 1.$$

Подставим эти значения в формулу теоремы Коши, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1} = f'(c), \text{или}\, f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Следствие 1. *Если производная функции равна нулю на некотором промежутке $(a;b)$, то функция постоянна на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$ и $x_1, x_2 \in (a;b)$. По теореме Лагранжа существует такая точка $c \in (x_1;\, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Но по условию $f'(c) = 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = f(x_1)$.

Следствие 2. *Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке $(a;b)$, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Доказательство. Пусть $f_1'(x) = f_2'(x)$ для $x \in (a;b)$. Тогда получаем $(f_2(x) - f_1(x))' = f_2'(x) - f_1'(x) = 0$. Из следствия 1 следует, что $f(x_2) - f(x_1) = c$ для $x \in (a;b)$. Но тогда $f(x_2) = f(x_1) + c$.

2.5 Формула Тэйлора

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и имеющая в ней производную до $n + 1$ порядка включительно. Для любого x из этой окрестности представим функцию в виде суммы степеней $(x - x_0)$, то есть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

Найдем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Для этого в равенстве для функции $f(x)$ положим $x = x_0$. Тогда $f(x_0) = a_0$. Продифференцируем исходное равенство

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

Приравняем опять $x = x_0$, получим $f'(x_0) = a_1$. Продолжая этот процесс дальше, найдем

$$f''(x_0) = 2a_2, f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3, \dots, f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n.$$

Таким образом,

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Окончательно выражение для $f(x)$ примет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots.$$

Можно показать, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ – n + 1-й остаточный член.

Точка c находится между x и x_0, то есть $c \in (x;\ x_0)$. Это равенство называется *формулой Тэйлора*. При $n = 0$, получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

и формула совпадет с формулой Лагранжа.

Пример 14. Разложить функцию

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

по степеням $(x - 2)$.

Решение. По формуле Тэйлора для $x_0 = 2$ имеем:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + R_n(x).$$

Найдем производные и их значения в точке $x = 2$

$$f(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 29,$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6x - 4, f'(2) = 8 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 60,$$

$$f''(x) = 24x^2 - 6x + 6, f''(2) = 24 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 6 = 90,$$

$$f'''(x) = 48x - 6, f'''(2) = 48 \cdot 2 - 6 = 90,$$

$$f^{(IV)}(x) = 48, f^{(IV)}(2) = 48.$$

Очевидно, пятая и все последующие производные будут равны нулю, поэтому $R_4(x) = 0$ и получаем разложение

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 29 + \frac{60}{1!}(x-2) + \frac{90}{2!}(x-2)^2 + \frac{90}{3!}(x-2)^3 +$$
$$+\frac{48}{4!}(x-2)^4 = 29 + 60(x-2) + 45(x-2)^2 + 15(x-2)^3 + 2(x-2)^4.$$

Если в формуле Тэйлора положить $x_0 = 0$, получим частный случай – формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^n,$$

где $c \in (0; x)$.

С помощью формулы Маклорена можно находить приближенные значения трансцендентных функций, разложение которых известно

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x \in R;$$

$$(1+x)^k \approx 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k!}{(k-n)! \cdot n!}x^n,$$

где $x \in (-1; 1)$;

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in R;$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}, x \in R;$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2\,835}x^9 + \dots$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1},$$

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1},$$

где $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4\,725} - \dots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1},$$

где $x \in (-\pi; \pi)$, B_n – числа Бернулли

$$B_n = \frac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots\right);$$

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, x \in (-1; 1);$$

$$\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots\right), x \in (-1; 1);$$

$$\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, x \in (-1; 1);$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, x \in (-1; 1].$$

2.6 Правила Лопиталя

Теорема 12. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Применим к функциям $f(x)$ *и* $g(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0. Тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $c \in [x_0; x]$. Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При $x \to x_0$, величина $c \to x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание 1. *Теорема верна и в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ не определены в точке x_0, но выполняется условие*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Замечание 2. Теорема верна и для случая, когда $x \to \infty$. Действительно, положим

$$x = \frac{1}{z},$$

получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 13. (Без доказательства). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0) и в этой окрестности*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \text{ и } g'(x) \neq 0.$$

и, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 15. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-8x+12},$$

используя правила Лопиталя.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-8x+12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)'}{(x^2-8x+12)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x-8} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 16. Используя правила Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 4x + \sin 6x}.$$

Решение. Предел имеет неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 4x + \sin 6x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x - \sin 3x)'}{(\sin 4x + \sin 6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x - 3\cos 3x}{4\cos 4x + 6\cos 6x} =$$

$$=\frac{5-3}{4+6}=\frac{1}{5}.$$

Пример 17. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x+1},$$

используя правила Лопиталя.

Решение. Обозначим искомый предел через A и найдем $\ln A$

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)}{\frac{1}{2x+1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ln'\left(1+\frac{3}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{(x-1)^2}}{\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\cdot\left(-\frac{2}{(2x+1)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3(x-1)\cdot(2x+1)^2}{2(x+2)\cdot(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+12x+3}{2x^2+2x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x+12}{4x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{4}=6.$$

Таким образом, $\ln A=6$, отсюда $A=e^6$.

3 Монотонность функций и точки экстремума

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию свойств функций.

3.1 Возрастание и убывание функций

По поведению производной функции на промежутках можно судить о ее монотонности на них.

3.1.1 Необходимые условия возрастания (убывания) функции

Теорема 14. *Если дифференцируемая на некотором интервале* $(a;b)$ *функция* $y = f(x)$ *возрастает (убывает) на нем, то* $f'(x) \geq 0$ *(*$f'(x) \leq 0$*) для всех* $x \in (a;b)$.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Выберем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на этом интервале и рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$ возрастает, поэтому при $\Delta x > 0$ будет

$x + \Delta x > x$ и $f(x+\Delta x) > f(x)$, а при $\Delta x < 0$ будет

$x + \Delta x < x$ и $f(x+\Delta x) < f(x)$. В обоих случаях

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0,$$

так как числитель и знаменатель дроби будут иметь одинаковые знаки.

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$.

Замечание 1. *Геометрически теорема 14 означает, что касательные к графику возрастающей функции имеют острые углы с положительным направлением оси* Ox *(рисунок 5), а убывающие – тупые (рисунок 6).*

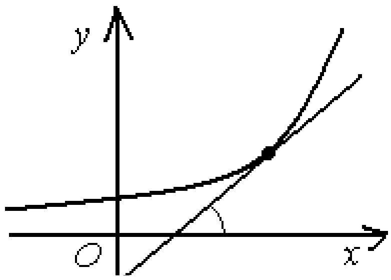


Рисунок 5

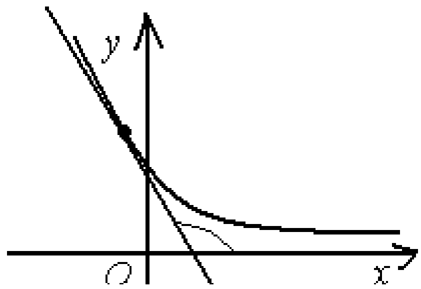


Рисунок 6

3.1.2 Достаточные условия возрастания (убывания) функции

Теорема 15. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a; b)$, то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$. Возьмем точки $x_2 > x_1$. Применим к отрезку $[x_1;\ x_2]$ теорему Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1),$$

где $c \in [x_1;\ x_2]$. Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ и } f(x_2) > f(x_1).$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$.

3.2 Максимум и минимум функции

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума) функции* $y = f(x)$, если существует такая ε – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) (рисунок 7).

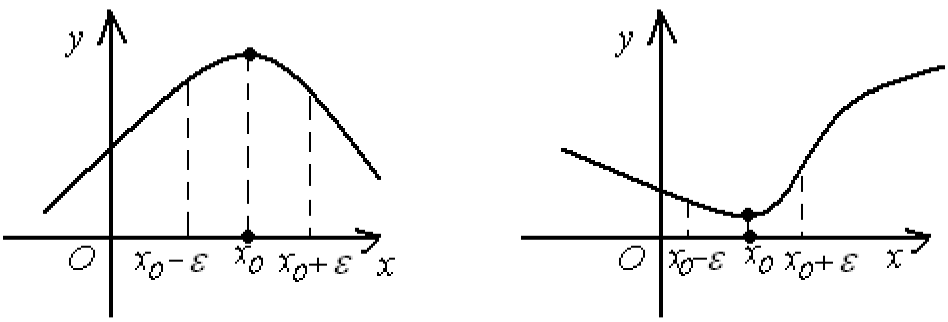


Рисунок 7

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ее *максимумом (минимумом)*.

Максимум и минимум функции называются ее *экстремумами*.

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют *критическими*.

3.3 Необходимое условие экстремума

Теорема 35. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю,* $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 – точка максимума. Следовательно, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0,$$

если $\Delta x > 0$ и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0,$$

если $\Delta x < 0$. По условию теоремы производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

существует. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geq 0$, если $\Delta x < 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, если $\Delta x > 0$. Это возможно лишь в случае $f'(x_0) = 0$.

Аналогично можно показать утверждение теоремы, если x_0 – точка минимума.

Замечание 1. *Геометрически утверждение теоремы означает, что в точках экстремума касательные к графику функции параллельны оси Ox (рисунок 9).*

Обратная теорема не верна. Если $f'(x_0) = 0$, то это не всегда означает, что точка x_0 – точка экстремума. Действительно, для функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ производная функция $y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$, но точка O не является ни минимумом, ни максимумом (рисунок 9).

Существуют также функции, которые в точках экстремума не имеют производных. Так, функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной, но эта точка является ее минимумом (рисунок 10).

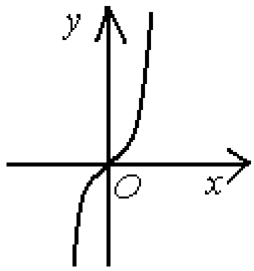


Рисунок 8

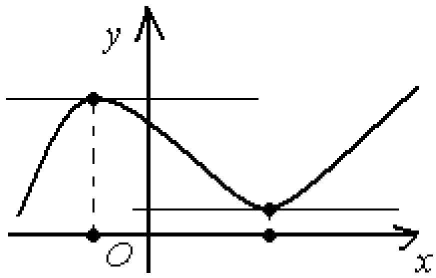


Рисунок 9

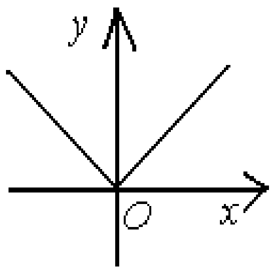


Рисунок 10

3.4 Достаточное условие экстремума

Теорема 36. *Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ – окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то точка x_0 есть точка максимума (минимума).*

Доказательство. Рассмотрим δ – окрестность точки x_0. Пусть выполняется условия: $f'(x) > 0$, для любого $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$, для любого $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и убывает на интервале $(x_0;\ x_0 + \delta)$. Следовательно, значение функции $y = f(x)$ в точке x_0 является наибольшим значением на интервале $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, то есть $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. Это означает, что x_0 – точка максимума. Аналогично доказывается случай для точки минимума (рисунок 11).

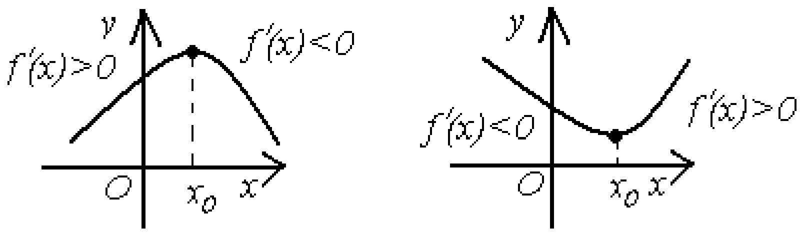


Рисунок 11

Теорема 18. *Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю $f'(x_0) = 0$, а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ – минимум.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то в достаточно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то

$$f'(x_0 + \Delta x) < 0,$$

а если $\Delta x > 0$, то

$$f'(x_0 + \Delta x) > 0.$$

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 16 достаточных условий экстремума, точка x_0 есть точка минимума. Аналогично доказывается случай для точки максимума.

Пример 18. Исследовать монотонность функции

$$y = \frac{x - 1}{x^2 + 8}$$

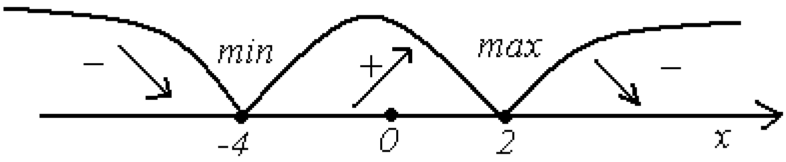
и найти ее точки экстремума.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$$y' = \frac{(x-1)' \cdot (x^2 + 8) - (x - 1) \cdot (x^2 + 8)'}{(x^2 + 8)^2} = \frac{x^2 + 8 - (x - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 8 - 2x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 8}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

Отсюда: $-x^2 + 2x + 8 = 0, x_1 = -4, x_2 = 2$. Построим числовую ось и на ней отметим методом интервалов знаки производной. Там, где производная меняет знак с плюса на минус, будет точка максимума (max), где с минуса на плюс – точка минимума (min).



Из чертежа видно, что минимум достигается в точке $x = -4$, максимум – в точке $x = 2$, причем

$$y_{\min} = \frac{-4-1}{16+8} = -\frac{5}{24}, y_{\max} = \frac{2-1}{4+8} = \frac{1}{12}.$$

Функция убывает на интервалах $(-\infty;\ -4)$ и $(2; +\infty)$, возрастает на интервале $(-4; 2)$ (рисунок 12).

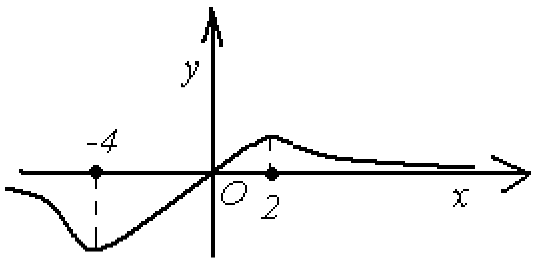


Рисунок 12

3.5 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Такая функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения она может принимать либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, то есть в точках a и b.

Если $x_0 \in (a; b)$, то наибольшее и наименьшее значения следует искать среди критических точек функции $y = f(x)$.

Таким образом, можно сформулировать следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание 1. Если функция $y = f(x)$ имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение (рисунок 13).

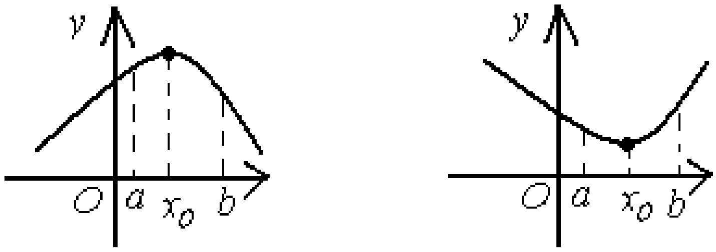


Рисунок 13

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек, то на нем функция либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Свои наибольшее и наименьшее значения функция принимает в этом случае на концах отрезка (рисунок 14).

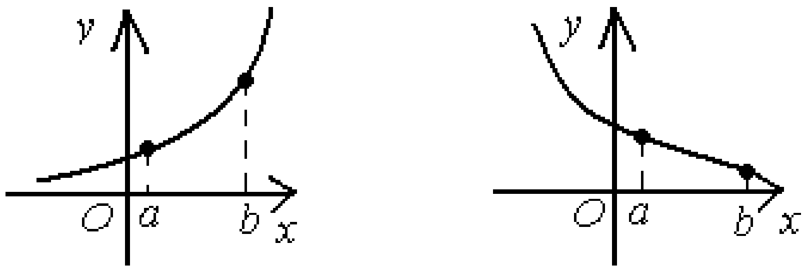


Рисунок 14

Пример 19. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 3x^5 - 100x^3 + 960x - 150$$

на отрезке $[-3: 3]$.

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = 15x^4 - 300x^2 + 960 = 0, \qquad x^4 - 20x^2 + 64 = 0.$$

Откуда $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 4$. Точки x_1 и x_4 не лежат на отрезке $[-3: 3]$, поэтому находим значения функции в точках x_2, x_3 и на границе отрезка – в точках $x = -3$ и $x = 3$:

$$y(-3) = 3(-3)^5 - 100(-3)^3 + 960(-3) - 150 = -3\,659;$$

$$y(-2) = 3(-2)^5 - 100(-2)^3 + 960(-2) - 150 = -2\,966;$$

$$y(2) = 3 \cdot 2^5 - 100 \cdot 2^3 + 960 \cdot 2 - 150 = 1\,066;$$

$$y(3) = 3 \cdot 3^5 - 100 \cdot 3^3 + 960 \cdot 3 - 150 = 759.$$

Выбираем наименьшее и наибольшее из этих значений.

Ответ: $y_{\text{наим.}} = -3\,659,$ при $x = -3,$

$y_{\text{наиб.}} = 1\,066,$ при $x = 2.$

4 Общее исследование функций

4.1 Основные понятия

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутом)* на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже (выше) ее любой касательной на этом интервале (рисунок 15).

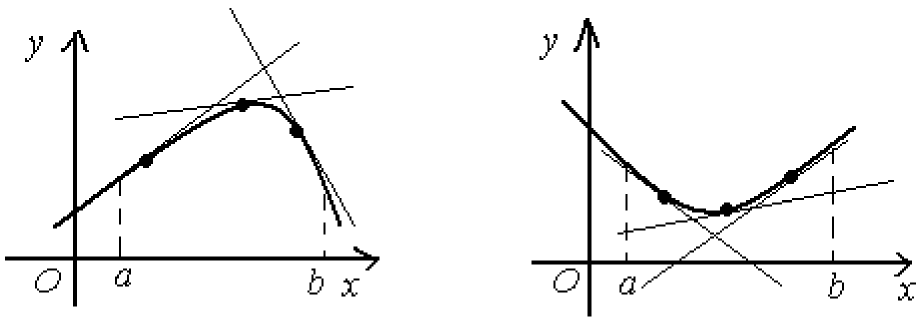


Рисунок 15

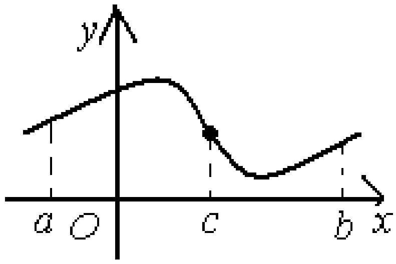


Рисунок 16

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, в которой она меняет вогнутость на выпуклость, называется *точкой перегиба*.

Так на рисунке 16 функция на интервале $(a; c)$ является выпуклой а на интервале $(c; b)$ – вогнутой. Следовательно, точка $x = c$ является точкой перегиба.

4.2 Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции на интервале

Выпуклость и вогнутость функции на интервале можно определить с помощью ее вторых производных.

Теорема 19. *Если функция* $y = f(x)$ *во всех точках из интервала* $(a; b)$ *имеет отрицательную (положительную) вторую производную* $f''(x) < 0$ *(*$f''(x) > 0$*), то график функции на этом интервале является выпуклым (вогнутым).*

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$. Возьмём на графике функции произвольную точку М с координатами $(x_0; f(x_0))$ и проведём через неё касательную. Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого возьмём произвольную точку $x \in (a; b)$ и сравним ординаты в этой точке графика y и касательной y_1. Уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Поэтому

$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда

$$y - y_1 = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

По теореме Лагранжа

$$y - y_1 = f'(c)(x - x_0) - f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0).$$

Снова применим теорему Лагранжа (для разности производных):

$$\left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0) = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0); \text{где } c_1 \in (x_0; c).$$

Исследуем знак этого выражения в зависимости от взаимного расположения точек x и x_0.

Случай 1. Точка $x > x_0$ (рисунок 17). Тогда выполняются неравенства

$$c - x_0 > 0;\ x - x_0 > 0,\ f''(c_1) < 0,$$

следовательно, $y - y_1 < 0$ или $y < y_1$.

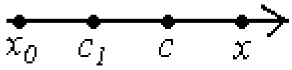


Рисунок 17

Случай 2. $x < x_0$ (рисунок 18). Тогда

$$c - x_0 < 0;\ x - x_0 < 0,\ f''(c_1) < 0,$$

следовательно, $y - y_1 < 0$ или опять $y < y_1$.

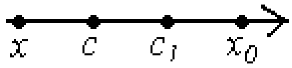


Рисунок 18

В любом случае имеем $y < y_1$, то есть ордината касательной больше ординаты графика для любой точки интервала $(a; b)$. По определению, график функции $y = f(x)$ является выпуклым. Аналогично можно рассмотреть случай, когда $f''(x) > 0$ и показать, что график функции в этом случае будет вогнутым.

4.3 Достаточное условие существования точек перегиба

Теорема 20. *Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она не существует или равна нулю, меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба.*

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это означает, что слева график функции является выпуклым, а справа – вогнутым, следовательно, точка x_0 является точкой перегиба по определению.

Пример 20. Найти промежутки выпуклости, вогнутости функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$$

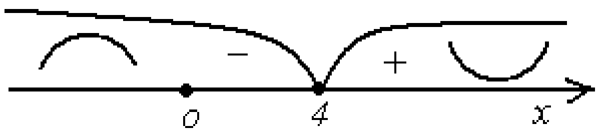
и установить ее точки перегиба.

Решение. Найдем последовательно первую и вторую производные функции

$$y' = 3x^2 - 24x + 3;$$

$$y'' = 6x - 24 = 0, x = 4.$$

Определим на числовой оси знаки второй производной.



Из чертежа видно, что вторая производная отрицательна (там функция выпукла) на интервале $(-\infty; 4)$ и положительна на интервале $(4; +\infty)$.

В точке $x = 4$ она меняет знак с (–) на (+), следовательно, эта точка является точкой перегиба (рисунок 19).

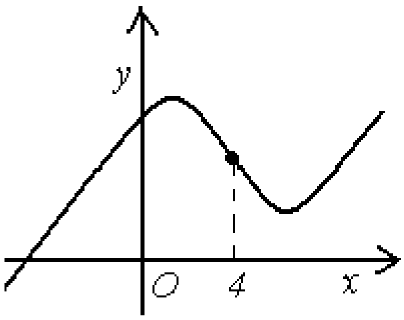


Рисунок 19

4.4 Асимптоты

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

4.4.1 Вертикальные асимптоты

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Обычно такими точками являются точки разрыва второго рода (рисунок 20). Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x, вблизи которых функция неограниченно возрастает по модулю. Так функция обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, то есть ось Ox (рисунок 21).

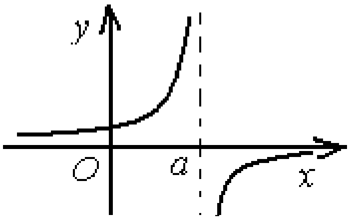


Рисунок 20

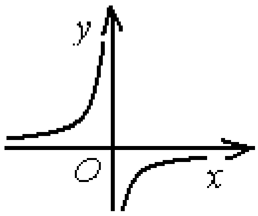


Рисунок 21

4.4.2 Наклонные и горизонтальные асимптоты

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка графика функции $y = f(x)$, по формуле расстояния от точки до прямой, имеем

$$d = \left|\frac{y - kx - b}{\sqrt{k^2 + 1}}\right|.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty} d = 0, \qquad \text{то } \lim_{x\to\infty}(y - kx - b) = 0, \text{ и } \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} kx + b.$$

Разделим обе части равенства на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx + b}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x}\right) = k.$$

Применяя к левой части правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} y' = k.$$

Коэффициент b найдем из условия

$$\lim_{x\to\infty}(y - kx - b) = 0.$$

Отсюда $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx)$.

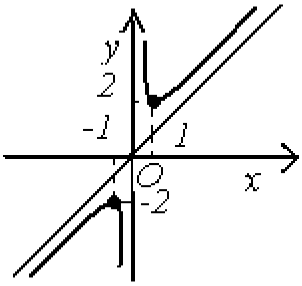


Рисунок 22

Если хотя бы один из этих пределов (или оба) не существуют, то функция $y = f(x)$ не имеет наклонных асимптот. Если $k = 0$, то прямая $y = b$ в этом случае является горизонтальной асимптотой. Так функция $y = x + \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и наклонную $y = x$ (рисунок 22).

Пример 21. Исследовать на асимптоты функцию $y = \dfrac{6x^2+1}{2x-4}$.

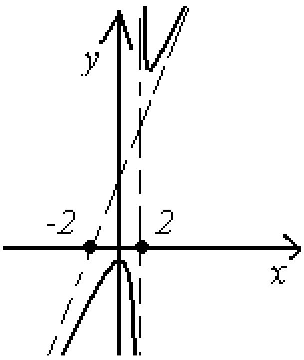


Рисунок 23

Решение. Так как при $x = 2$ функция имеет разрыв 2 – го рода, то график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$. Наклонные асимптоты имеют вид $y = kx + b$. Найдем их коэффициенты.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+1}{2x^2-4x} = 3.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2+1}{2x-4} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x+1}{2x-4}\right) = 6.$$

Таким образом, график имеет наклонную асимптоту $y = 3x + 6$ (рисунок 23).

4.5 Схема исследования функций и построения их графиков

1) Находят область определения функции $D(y)$;

2) определяют (если возможно) точки пересечения графика с осями координат;

3) проверяют чётность или нечётность, периодичность функции. Графики четной и нечетной функции строят только для $x \geq 0$, затем четную функцию отображают симметрично относительно оси Oy,

нечетную – относительно точки O. Периодическую функцию строят на интервале, равном периоду, затем продолжают на всю числовую ось Ox;

4) находят первую производную, исследуют интервалы монотонности и находят точки экстремума;

5) находят вторую производную и исследуют промежутки выпуклости и вогнутости, устанавливают точки перегиба;

6) исследуют функцию на наличие асимптот (вертикальных, наклонных, горизонтальных).

На основании всех этих свойств строят эскиз графика $y = f(x)$.

Пример 22. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{x^2 + 10x - 40}{x^2 + 3x - 18}.$$

Решение. 1) найдем область определения функции. Так как знаменатель дроби равен нулю при $x_1 = -6$ и при $x_2 = 3$, то в этих точках функция не определена и имеет разрыв второго рода, поэтому

$$D(f) = (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ 3) \cup (3;\ +\infty);$$

2) при $x = 0$ переменная $y = \frac{20}{9} \approx 2{,}22$. Таким образом, ось Oy пересекается в точке $y = 2{,}22$. Если же $y = 0$, то $x^2 + 10x - 40 = 0$ и $x_1 = -5 - \sqrt{65} \approx -13{,}06$, $x_2 = -5 + \sqrt{65} \approx 3{,}06$. Эти точки иявляются точками пересечения графика с осью Ox;

3) так как

$$f(-x) = \frac{x^2 - 10x - 40}{x^2 - 3x - 18} = -\frac{-x^2 + 10x + 40}{x^2 - 3x - 18} \neq -f(x) \text{и}\ f(-x) \neq f(x),$$

то функция не является четной и не является нечетной, то есть $f(x)$ – функция общего вида. Заметим, что этот вывод следует также из того, что она определена на несимметрическом множестве. Из последнего факта следует также непериодичность функции;

4) найдем производную функции и исследуем ее на монотонность и точки экстремума:

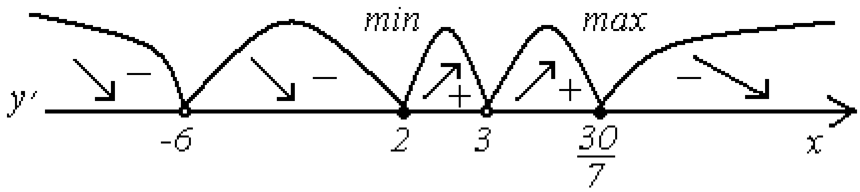
$$y' = \frac{(x^2 + 10x - 40)'(x^2 + 3x - 18) - (x^2 + 10x - 40)(x^2 + 3x - 18)'}{(x^2 + 3x - 18)^2} =$$

$$= \frac{(2x+10)(x^2+3x-18)-(x^2+10x-40)\cdot(2x+3)}{(x^2+3x-18)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+6x^2-36x+10x^2+30x-180-2x^3-3x^2-20x^2-30x+80x+120}{(x^2+3x-18)^2} =$$

$$= \frac{-7x^2+44x-60}{(x^2+3x-18)^2}.$$

Отсюда $y' = 0$ при $-7x^2+44x-60=0$ и $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{30}{7}$. Нанесем на числовую ось критические точки и определим знаки производной на промежутках



Из схемы видно, что функция $y = f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty;\ -6)$, $(-6;\ 2)$, $\left(\frac{30}{7};+\infty\right)$ и возрастает на промежутках $(2;\ 3)$, $\left(3;\frac{30}{7}\right)$. Точка $x = 2$ является точкой минимума, а точка $x = \frac{30}{7}$ – точкой максимума. Причем

$$f(2) = \frac{2^2+10\cdot 2-40}{2^2+3\cdot 2-18} = \frac{-16}{-8} = 2.$$

$$f\left(\frac{30}{7}\right) = \frac{\left(\frac{30}{7}\right)^2+10\left(\frac{30}{7}\right)-40}{\left(\frac{30}{7}\right)^2+3\left(\frac{30}{7}\right)-18} = \frac{130}{81} \approx 1{,}6;$$

5) найдем вторую производную и исследуем промежутки выпуклости, вогнутости функции, определим точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{-7x^2+44x-60}{(x^2+3x-18)^2}\right)' = \frac{-14x^3+132x^2-360x+432}{(x^2+3x-18)^3}.$$

Отсюда $y'' = 0$ и $-14x^3+132x^2-360x+432=0$ или

$$7x^3 - 66x^2 + 180x - 216 = 0.$$

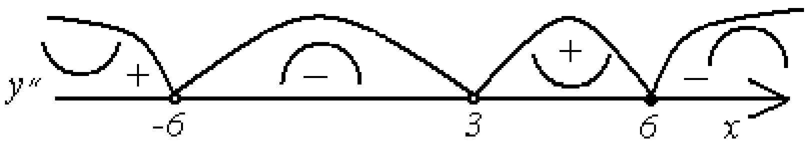
Проверяя целые делители числа 216, убеждаемся, что значение $x = 6$ является корнем уравнения. Разделив в соответствии с теоремой Безу выражение в правой части на $x - 6$, получим разложение на множители

$$(x - 6)(7x^2 - 24x + 36) = 0.$$

Уравнение $7x^2 - 24x + 36 = 0$ корней не имеет, так как дискриминант

$$D = 576 - 1\,008 = -432 < 0.$$

Нанесем на числовую ось точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, и определим промежутки выпуклости и вогнутости.



Из схемы видно, что вторая производная функции положительна на промежутках $(-\infty;\,-6)$ и $(3;\,6)$, следовательно, на них график является выпуклым. На промежутках $(-6; 3)$ и $(6;\,+\infty)$ вторая производная отрицательна, и функция является выпуклой на них. В точке $x = 6$ функция определена и y'' меняет знак с (+) на (–), и поэтому она является точкой перегиба, причем

$$f(6) = \frac{6^2 + 10 \cdot 6 - 40}{6^2 + 3 \cdot 6 - 18} = \frac{14}{9} \approx 1{,}6;$$

6) исследуем график на асимптоты. Так как функция в точках $x_1 = -6$ и $x_2 = 3$ имеет разрыв второго рода, то прямые $x = -6$ и $x = 3$ являются вертикальными асимптотами. Для определения наклонных (и горизонтальных) асимптот вида $y = kx + b$ определим коэффициенты k и b.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 10x - 40}{x \cdot (x^2 + 3x - 18)} = 0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)\ =\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+10x-40}{x^2+3x-18}-0\cdot x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+10x-40}{x^2+3x-18}=1.$$

Таким образом график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=1$. На основании полученных данных, строим график функции (рисунок 24).

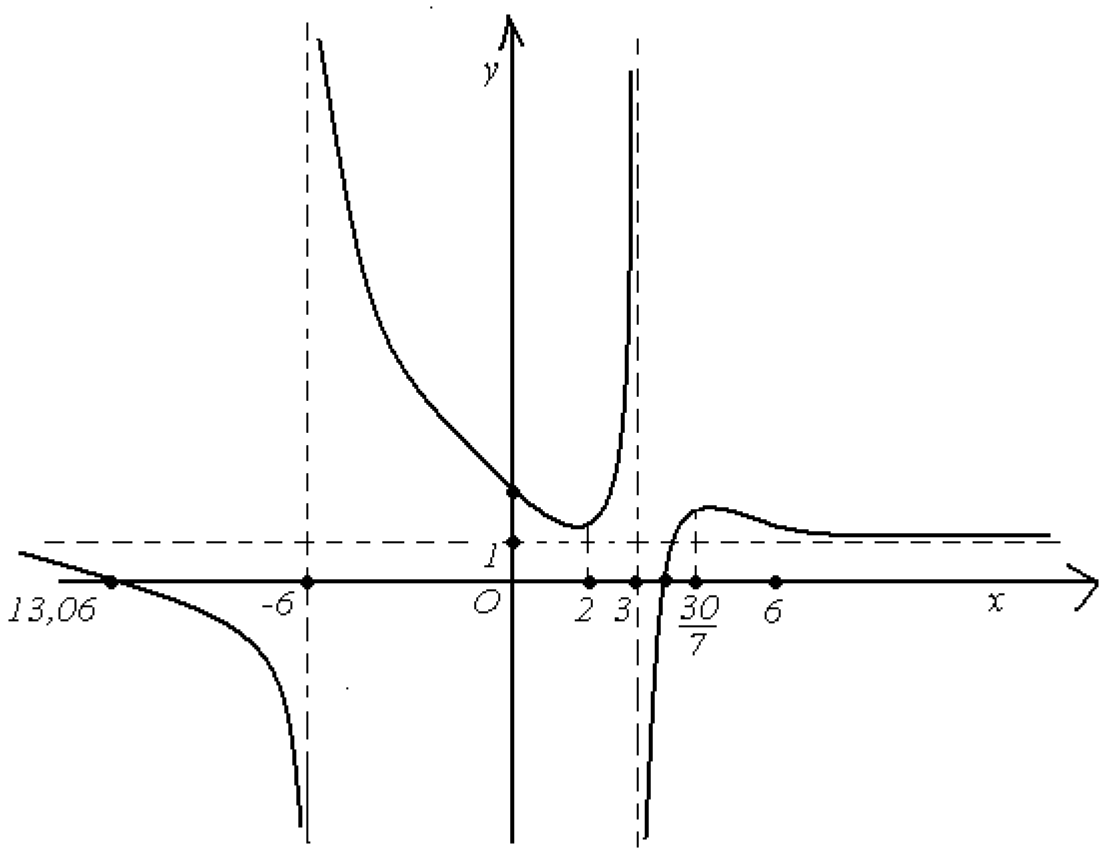


Рисунок 24

Литература

1 Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под общ. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 471 с.

2 Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

3 Общий курс высшей математики для экономистов / Б. М. Рудык [и др.]; под общ. ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА, 2002. – 656 с.

4 Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Тетра Системс, 2001. – Т. 1. – 544 с. – Т. 2. – 448 с.

5 Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике : учебное пособие для студ. естествен. спец. вузов : в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Высшая школа, 1988. – Ч. 1. – 247 с. – Ч. 2. – 228 с.

6 Письменный, Д. П. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д. П. Письменный. – М. : Рольф, 2000. – 288 с.

7 Белько, И. В. Высшая математика для экономистов. I семестр : экспресс–курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М. : Новое издание, 2002. – 140 с.

8 Минюк, С. А. Высшая математика : учебное пособие для студентов экономических специальностей высших учебных заведений / С. А. Минюк, Е. А. Ровба. – Гродно : ГрГУ, 2004. – 407 с.

9 Рыбасенко, В. Д. Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики / В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.

Производственно-практическое издание

Лемешев Валерий Петрович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 02.11.2017. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 848.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.