Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(45), 2006

УДК 512.542

О минимальных τ-значных ω-композиционных спутниках формаций

М. В. Задорожнюк

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется терминология, принятая в [1,2]. Напомним лишь некоторые определения и обозначения.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый непустой класс простых абелевых групп, $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-композиционным спутником. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение всех централизаторов главных p-факторов группы G ($C^p(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Символы $R_\omega(G)$ и $C(G)$ обозначают соответственно произведение всех разрешимых ω-подгрупп группы G и множество всех абелевых композиционных факторов группы G.

Для произвольного ω-композиционного спутника f вводится класс групп

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{и } G/C^p(G) \in f(p) \\ \text{для всех } p \in \pi(C(G)) \cap \omega\}.$$

Для произвольных ω-композиционных спутников f_1 и f_2 положим, что $f_1 \leq f_2$ тогда и только тогда, когда $f_1(a) \subseteq f_2(a)$ для любого числа $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называется ω-композиционной формацией, а f — ее ω-композиционным спутником.

Непустая совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Спутник f назовем Θ-значным, если все его значения принадлежат Θ.

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место

$$H^\varphi \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Для произвольных подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 положим, что $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G.

В данной работе мы рассмотрим только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G каждая ее подгруппа $H \in \tau(G)$ является субнормальной в G.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ ω-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначается такой ω-композиционный спутник, что

$$\Big(\bigcap_{i\in I} f_i\Big)(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех τ-значных ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2 [2], $\bigcap_{i \in I} f_i$ является τ-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$ и такой спутник называется минимальным τ-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе дано описание минимальных τ-значных ω-композиционных спутников формаций.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — простое число. Положим

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}\,(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(C(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(C(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Пересечение всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$ и называется τ-замкнутой ω-композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,\{G\}$ пишут $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(G)$ и формация такого типа называется однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формацией.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{M}$ — нормально наследственная формация, $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой формацией.

Лемма 2. Пусть A — простая группа, $N_1, N_2, \ldots, N_t$ — нормальные подгруппы группы G, такие что $\bigcap_{i=1}^t N_i = 1$. Тогда если $A \notin C(Soc(G/N_i))$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, то $A \notin C(Soc(G))$.

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация, $\mathfrak{F} = c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$, f — минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}(C^p))$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(C(\mathfrak{F}))$.

4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ и спутник h τ-значен, то для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$

$$f(p) = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

и

$$f(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

Отметим, что в случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор (т.е. для любой группы G имеет место $\tau(G) = \{G\}$) из теоремы непосредственно вытекают следующие результаты.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F}$ — ω-композиционная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, f — минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = \mathrm{form}\,(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \mathrm{form}\,(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(C(\mathfrak{F}))$;

4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$, то для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$

$$f(p) = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

и

$$f(\omega') = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

Следствие 2[3]. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, f — минимальный композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(p) = \mathrm{form}\,(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F}))$;
2) $f(p) = \varnothing$ для всех $p \notin \pi(C(\mathfrak{F}))$;
3) если $\mathfrak{F} = CF(h)$, то для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F}))$

$$f(p) = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1).$$

Abstract. A description of minimal τ-valued ω-composition satellites of formations of finite groups is given in the paper.

Литература

1. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба; Минск: Беларуская навука. 1997. — 240 с.

2. Скиба, А. Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский математический журнал, 2000. — Т. 52. — № 6. — С. 783–797.

3. Скиба, А. Н. О минимальном композиционном экране композиционной формации / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Вопросы алгебры, 1992. — Вып. 7. — С. 39–43.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 27.04.07