Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. П. Лемешев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Практическое пособие

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 51(076)
ББК 22.1я73
Л442

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук В. Н. Семенчук,
канд. физ.-мат. наук Т. И. Васильева

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Лемешев, В. П.

Л442 Высшая математика. Аналитическая геометрия. Элементы линейной алгебры : практическое пособие / В. П. Лемешев ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 43 с.

ISBN 978–985–577–366–6

Практическое пособие включает теоретические и практические материалы по аналитической геометрии на плоскости, кривым второго порядка, теории матриц и линейной алгебре. Значительное место отводится базовым основам матричного исчисления, понятиям теории систем линейных уравнений, общих методов их решений.

Адресовано студентам вуза.

УДК 51(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978–985–577–366–6

Оглавление

Предисловие

Практическое пособие по аналитической геометрии предназначено для студентов первого курса экономических специальностей дневной и заочной форм обучения. Оно содержит начальные сведения по основам линейной алгебры. Издание включает теоретические и практические материалы, относящиеся к темам аналитической геометрии на плоскости, кривых второго порядка, теории матриц и линейной алгебры. В пособии дается большое количество примеров и рисунков, иллюстрирующих различные представления прямой линии на плоскости и кривых второго порядка. Значительное место занимают базовые основы матричного исчисления, а также основные понятия теории систем линейных уравнений, общих методов их решений.

Пособие максимально направлено на возможность самостоятельной работы студентов. Изложение теоретического материала компактно и сопровождается изложением в каждом вопросе достаточного количества практических материалов, которые могут быть использованы в качестве основы для дальнейшей разработки индивидуальных заданий по приведенным темам.

Данное пособие может служить основой для подготовки студентов экономических специальностей к экзамену по высшей математике во втором семестре. Оно может быть полезным также для студентов других специализаций, изучающих базовые основы высшей математики.

1 Декартова система координат. Прямая линия

1.1 Системы координат на плоскости

Декартова система координат

Под *прямоугольной (декартовой) системой координат* понимают пару взаимно перпендикулярных прямых, на которых заданы положительное направление и масштаб. Вертикальная прямая – ось Oy (*ось ординат*); горизонтальная – ось Ox (*ось абсцисс*). Система координат используется для однозначного определения положения объектов на плоскости. Это делается с помощью координат точек. Каждая точка M на плоскости определяется двумя числами x и y, (рисунок 1), называемыми *координатами* $(x; y)$. Точки $M_1(-1; 2)$ и $M(x; y)$ расположены на плоскости в соответствии со своими координатами.

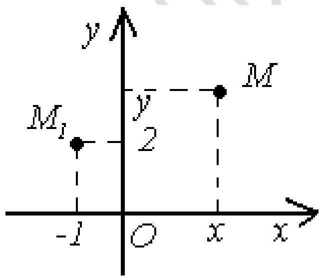


Рисунок 1

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из точки O, которая называется полюсом, и оси, задающей некоторое первоначальное направление. Это направление совпадает с направлением оси Ox. Тогда положение любой точки определяется расстоянием от неё до полюса и углом между прямой, содержащей точку и полюс, и первоначальным направлением (рисунок 2). Так точка $M_1\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ в полярной системе координат имеет положение, указанное на рисунке 3.

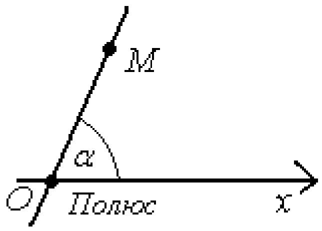


Рисунок 2

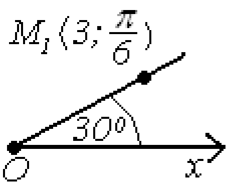


Рисунок 3

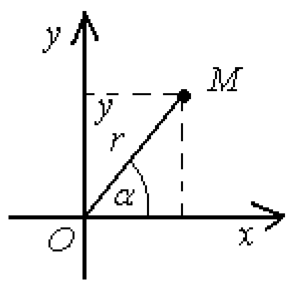


Рисунок 4

Связь между декартовой и полярной системами можно установить, совместив их начала координат и выразив координаты произвольной точки в обеих системах.

Так, если точка M (рисунок 4) имеет в декартовой системе координаты $(x; y)$, а в полярной системе – $(r; \alpha)$, то

$$x = r \cdot \cos\alpha,\ y = r \cdot \sin\alpha.$$

Отсюда следует и обратное выражение для полярных координат через декартовы координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рисунок 5). Тогда расстояние $d = M_1M_2$ можно найти из прямоугольного треугольника M_1M_2M. По теореме Пифагора

$$d^2 = (M_1M_2)^2 = (M_1M)^2 + (MM_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

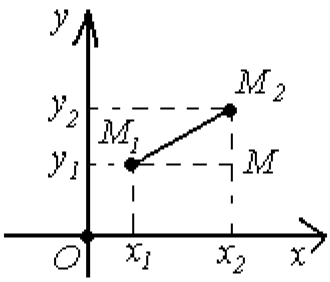


Рисунок 5

Отсюда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пример 1. Даны две точки $\mathrm{M}_1(8; -1)$ и $\mathrm{M}_2(11; 3)$. Найти расстояние между ними.

Решение. По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$d = \sqrt{(11 - 8)^2 + (3 + 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Деление отрезка в данном отношении

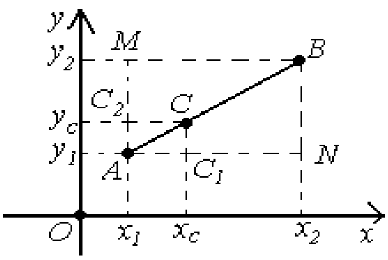


Рисунок 6

Пусть в декартовой системе координат даны две точки – $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (рисунок 6). Требуется на отрезке AB найти координаты точки C такой, что $\frac{AC}{DC} = \lambda$.

Для решения этой задачи через точку A

проведем прямые AM и AN. Тогда для угла $\angle BAN$ по теореме Фалеса имеем

$$\frac{AC_1}{NC_1} = \lambda,$$

или

$$\frac{(x_c - x_1)}{(x_2 - x_c)} = \lambda.$$

Отсюда

$$x_c - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x_c), x_c + \lambda \cdot x_c = x_1 + \lambda \cdot x_2,$$

или

$$x_c \cdot (1 + \lambda) = x_1 + \lambda \cdot x_2,$$

и окончательно

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}.$$

Рассуждая аналогично, можно найти и вторую координату точки по оси $0y$

$$y_c = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}.$$

Пример 2. Даны точки $A(1;\ 3)$ и $B(5;\ 7)$. Требуется найти координаты середины отрезка AB.

Решение. В нашем случае (рисунок 7)

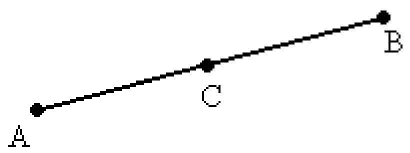


Рисунок 7

$$\frac{AC}{BC} = \lambda = 1,$$

поэтому

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + 1 \cdot 5}{1 + 1} = 3;$$

$$y_c = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 1 \cdot 7}{1 + 1} = 5.$$

Ответ: искомая точка C имеет координаты $(3; 5)$.

1.2 Прямая линия на плоскости

Уравнение прямой линии через угловой коэффициент k

Рассмотрим прямую линию в декартовой системе координат, проходящую через точку $N(0;b)$ под углом α с положительным направлением оси Ox. Возьмем на ней (рисунок 8) некоторую точку M с произвольными текущими координатами $(x;y)$. Проведем через точку N прямую линию NA. Тогда из прямоугольного треугольника NAM получим

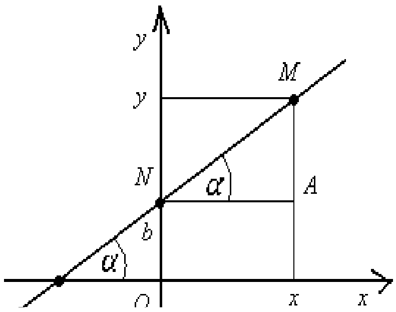


Рисунок 8

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{AM}{AN},$$

Так как $AM = y - b, AN = x$, то

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}, \text{ или}$$

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x + b.$$

Величина $\mathrm{tg}\alpha$ обозначается через k и называется *угловым коэффициентом* прямой линии. Таким образом, уравнение прямой линии в декартовой системе координат через угловой коэффициент имеет вид

$$y = kx + b.$$

Пример 3. Построить график прямой линии $y = \sqrt{3} \cdot x + 1$.

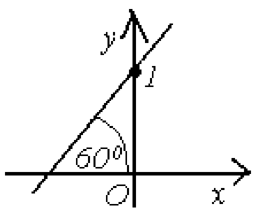


Рисунок 9

Решение. Так как $k = \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}, \alpha = 60^{\circ}$ и значение $b = 1$, то искомая прямая линия пересекает ось Oy в точке $y = 1$ под углом 60° к положительному направлению оси Ox (рисунок 9).

Замечание. Если $b = 0$, то уравнение прямой линии имеет вид $y = kx$ и график проходит через начало координат.

Пример 4. Построить на плоскости график прямой линии, имеющей уравнение $y = 2x + 4$.

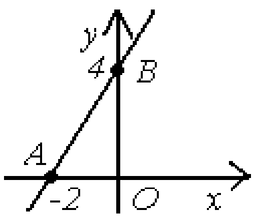


Рисунок 10

Решение. Так как прямая линия однозначно определяется двумя своими различными точками, то определим координаты этих точек из уравнения прямой. Положим $x = 0$, тогда $y = 2 \cdot 0 + 4 = 4$. Одна точка (точка A) имеет координаты $(0; 4)$. Пусть теперь $y = 0$, тогда $0 = 2 \cdot x + 4$ и $x = -2$. Вторая точка (точка B) имеет координаты $(-2; 0)$. Тогда искомая прямая линия проходит через точки A и B, как указано на рисунке 10.

Уравнение прямой линии, проходящей через заданную точку и в данном направлении

Пусть дана точка M_0 с координатами $(x_0; y_0)$. Требуется написать уравнение прямой линии, проходящей через точку M и имеющей угловой коэффициент k. Уравнение прямой линии через угловой коэффициент k имеет вид

$$y = kx + b.$$

Так как прямая линия проходит через точку M_0, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, то есть $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда

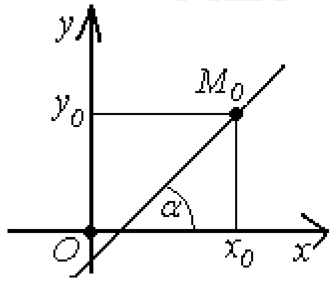


Рисунок 11

$$b = y_0 - kx_0.$$

Подставив значение b в уравнение прямой линии через угловой коэффициент, получим $y = kx + y_0 - kx_0$ или

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Это и есть уравнение прямой линии, проходящей через точку M и имеющей угловой коэффициент k (рисунок 11).

Пример 5. Написать уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(2; 3)$ под углом 45° с положительным направлением оси Ox.

Решение. В нашем случае $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $k = \mathrm{tg}45^\circ = 1$, поэтому уравнение прямой имеет вид $y - 3 = 1 \cdot (x - 2)$ или $y = x + 1$.

Уравнение прямой линии, проходящей через 2 точки

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Тогда существует единственная прямая линия, которая проходит через эти точки (рисунок 12). Установим уравнение этой прямой линии. Так как уравнение прямой линии, проходящей через точку M_1, имеет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$ и прямая

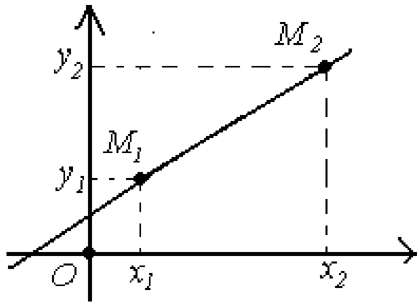


Рисунок 12

линия проходит через точку M_2, то справедливо равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)\,.$$

Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставим значение k в уравнение, получим

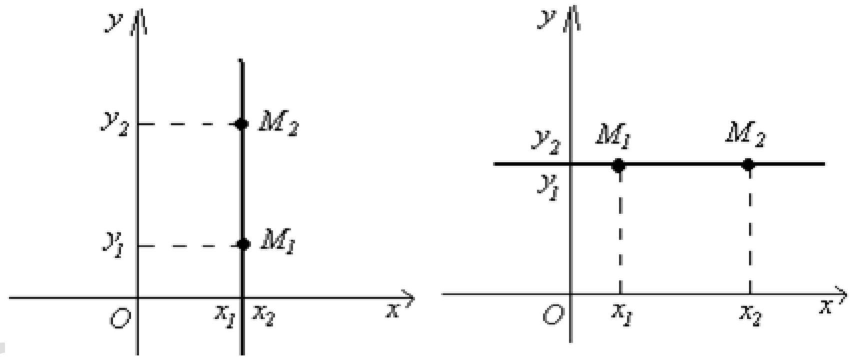
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

После преобразования уравнение прямой линии, проходящей через точки M_1 и M_2, примет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая линия, проходящая через точки M_1 и M_2 и параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$ (рисунок 13 *а*).



а) б)

Рисунок 13

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой линии может быть записано в виде $y = y_1$, и она параллельна оси абсцисс Ox (рисунок 13 *б*)).

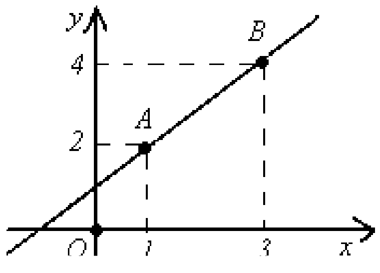


Рисунок 14

Пример 6. Написать уравнение прямой линии, проходящей через точки $A(1;2)$ и $B(3;4)$ (рисунок 14).

Решение. По формуле уравнения прямой

линии, проходящей через две точки, имеем

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

В нашем случае значения координат равны $x_1=1, y_1=2,\ x_2=3,\ \ y_2=4$, поэтому уравнение прямой линии, имеет вид

$$\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{3-1}.$$

После преобразований получим $y=x+1$.

Уравнение прямой линии в отрезках по осям

Пусть график некоторой прямой линии отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно (рисунок 15). Возникает вопрос: каким образом эти параметры могут быть отражены в уравнении прямой линии?

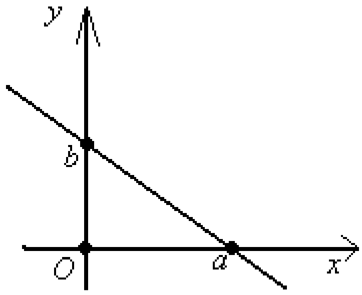


Рисунок 15

Так как в этом случае прямая линия проходит через точки $M_1(a;0)$ и $M_2(0;b)$, то по формуле уравнения прямой линии, проходящей через 2 точки, имеем

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

или

$$\frac{y}{b}=\frac{-x}{a+1}.$$

Окончательно получим уравнение

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1.$$

Пример 7. Написать уравнение прямой линии $y=3x+2$ в виде уравнения в отрезках по осям и построить график этой прямой линии.

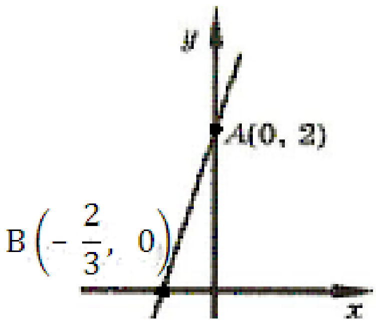


Рисунок 16

Решение. Перенесем переменные уравнения в одну сторону $y-3x=2$, затем разделим на правую часть, равную 2, получим равенство

$$\frac{y}{2} - \frac{3x}{2} = 1,$$

и, таким образом,

$$a = -\frac{2}{3}, b = 2.$$

Откладываем эти значения соответственно по осям Ox и Oy, строим последовательно точки A и B (рисунок 16), через которые и проводим искомую прямую линию.

2 Общее уравнение прямой линии

Угол между двумя прямыми линиями

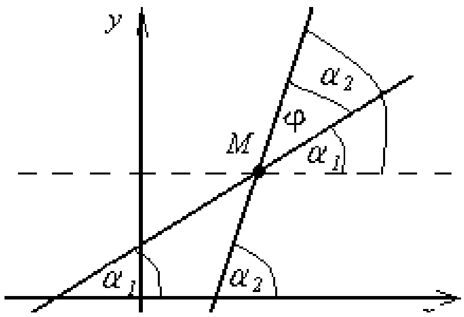


Рисунок 17

Пусть заданы две различные прямые линии (рисунок 17)

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2.$$

Тогда

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1,\ k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

и угол между этими прямыми равен

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Таким образом, формула угла между двумя прямыми линиями имеет вид

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

Условие параллельности двух прямых линий

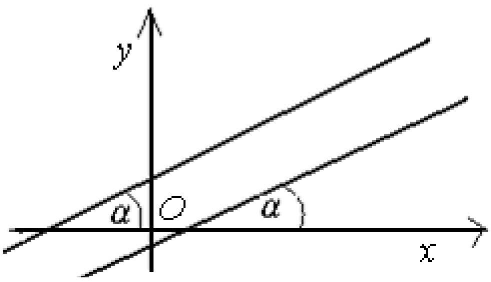


Рисунок 18

Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то угол между ними равен нулю и тогда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = 0.$

Следовательно, $k_2 - k_1 = 0$, что равносильно равенству $k_2 = k_1$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием параллельности прямых линий является равенство их угловых коэффициентов $k_2 = k_1$ (рисунок 18).

Пример 8. Две прямые линии $y = 2x - 5$ и $y = 2x - 3$ являются параллельными так как $k_2 = k_1 = 2$.

Условие перпендикулярности двух прямых линий

Если две прямые линии $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ взаимно перпендикулярны (рисунок 19), то угол между ними равен $\varphi = 90^\circ$ и $\operatorname{tg}\varphi$ не существует. А так как

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1},$$

и дробь

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$

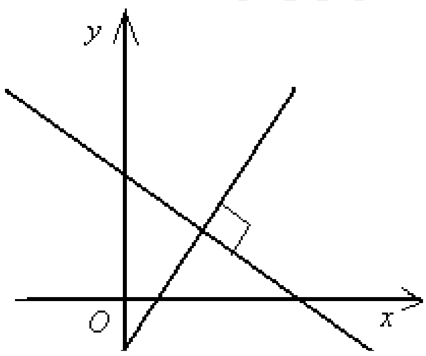


Рисунок 19

не существует тогда и только тогда, когда её знаменатель равен нулю, то есть тогда, когда выполняется равенство $1 + k_2 \cdot k_1 = 0$. Это и есть условие перпендикулярности двух прямых линий. Выразив один угловой коэффициент через другой, получим

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Пример 9. Прямые линии

$$y = \frac{2}{3}x + 1 \text{ и } y = -\frac{3}{2}x + 2$$

перпендикулярны, так как

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Общее уравнение прямой линии

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой*:

а) если $C = 0$, то уравнение будет иметь вид $Ax + By = 0$. Прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты $x = 0, y = 0$ удовлетворяют этому уравнению;

б) если $B = 0$, то уравнение примет вид $AX + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$.

Данное уравнение не содержит переменной y, а определяемая им прямая, параллельна оси Oy;

в) если $B \neq 0$, то уравнение примет вид $By = -Ax - C$, откуда

$$y = \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}.$$

Обозначим

$$k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B},$$

получим $y = kx + b$ – уравнение прямой линии через угловой коэффициент k.

Уравнение прямой линии в полярных координатах

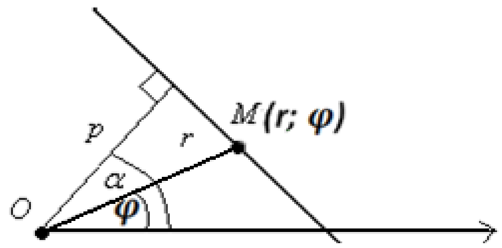


Рисунок 20

Пусть дана система полярных координат $(r; \varphi)$ с полюсом в точке O и прямая, проходящая на расстоянии p от полюса (рисунок 20). Выберем на прямой произвольную точку M с текущими координатами $(r; \varphi)$. Тогда из прямоугольного треугольника получим равенство

$$\text{p} = r \cdot \cos(\alpha - \varphi),$$

или ввиду четности функции косинуса

$$\text{p} = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Это и есть уравнение прямой в полярных координатах.

Нормальное уравнение прямой линии

Так как уравнение прямой в полярных координатах имеет вид

$$\text{p} = r \cdot \cos(\varphi - \alpha),$$

где p – расстояние от полюса до данной прямой линии, то разложив косинус, получим

$$r \cdot (\cos\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\varphi \cdot \sin\alpha) = \mathrm{p}.$$

Учитывая формулы перехода от полярных координат к декартовым координатам,

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

получим уравнение прямой линии в виде

$$x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - \mathrm{p} = 0,$$

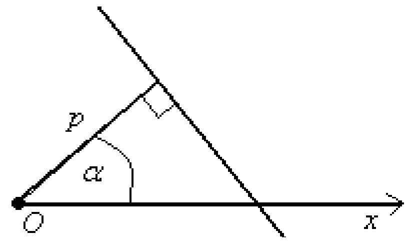


Рисунок 21

которое называется *нормальным* (рисунок 21).

Замечание. Чтобы общее уравнение прямой линии

$$Ax + By + C = 0$$

записать в нормальном виде, необходимо его разделить на выражение $\sqrt{A^2 + B^2}$. Тогда оно примет вид

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y - \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Заменив

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим уравнение в нормальном виде.

Пример 10. Записать уравнение прямой линии $3y - 4x = 5$ в нормальном виде.

Решение. Запишем уравнение в общем виде, перенеся все слагаемые в одну сторону

$$3y - 4x - 5 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

получим

$$\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}x - 1 = 0.$$

Так как

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{4}{5} = \cos\alpha, \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{3}{5} = \sin\alpha,$$

то это и есть нормальное уравнение прямой линии.

Расстояние от точки до прямой линии

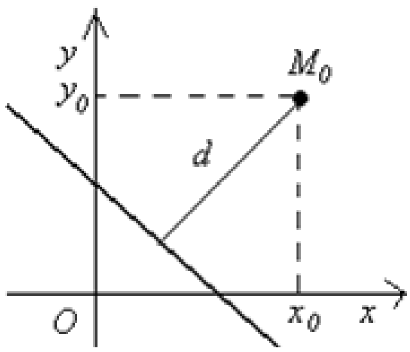


Рисунок 22

Пусть дано общее уравнение прямой линии в виде $Ax + By + C = 0$ и дана точка $M_0(x_0; y_0)$, не лежащая на этой прямой. Требуется определить расстояние d от точки M_0 до прямой линии (рисунок 22).

Нормальное уравнение прямой линии имеет вид

$$x \cdot \cos\alpha + y \sin\alpha - \mathrm{p} = 0.$$

Здесь p означает расстояние от полюса до прямой линии. Отсюда

$$d = p = |x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha|.$$

Переместим полюс в точку M_0. Тогда

$$d = |(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha|,$$

или

$$d = \left|\frac{(x - x_0)A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{(y - y_0)B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{Ax - Ax_0 + By - By_0 + C - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

А так как $Ax + By + C = 0$, то окончательно получаем

$$d = \left|\frac{-Ax_0 - By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Пример 11. Найти расстояние от точки $A(2; 1)$ до прямой линии, заданной уравнением

$$3x + 4y + 10 = 0.$$

Решение. По формуле расстояния от точки до прямой линии имеем

$$\mathrm{d} = \left|\frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right| = 4.$$

3 Линии 2-го порядка на плоскости

Основные понятия

Рассмотрим линии, уравнения которых задаются в виде выражений, в которых переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ входят со степенью не выше второй, то есть имеют вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

и где, по крайней мере, один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка*.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

Окружность

Окружностью с центром в точке D радиуса R называется множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки D на расстояние R.

Пусть центр окружности D имеет координаты $(x_0;\ y_0)$, $M(x;y)$ – некоторая её точка (рисунок 23). Тогда по определению, расстояние $DM = R$ или

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R.$$

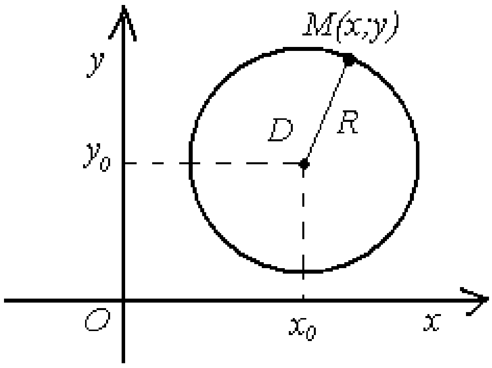


Рисунок 23

Возведя обе части равенства в квадрат, получим каноническое уравнение окружности

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр окружности расположен в начале координат и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Выберем фокусы эллипса $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, лежащие на оси Ox. Тогда расстояние между ними будет равно $2c$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса и $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ (рисунок 24). Тогда $r_1 + r_2 = 2a > 2c$, т. е.

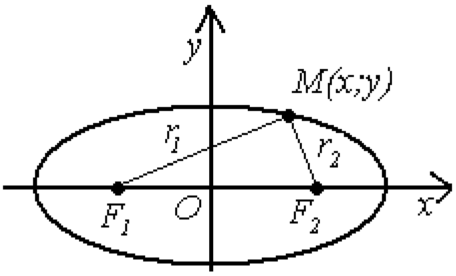


Рисунок 24

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Перенесем второй корень вправо

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем обе части в квадрат и раскроем скобки

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Приведя подобные, сократив обе части на 4, получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx,$$

и, возведя опять обе части в квадрат, будем иметь

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Обозначим через $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > c)$, тогда

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или окончательно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это и есть каноническое уравнение эллипса. Если справедливо равенство $a = b$, то эллипс превращается в окружность $(R = a)$. Числа $2a$ и $2b$ называются *большой и малой осями* эллипса. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом эллипса*. Заметим, что у эллипса всегда $\varepsilon < 1$. Если $a = b$, (случай окружности) то $c = 0$, и следовательно, $\varepsilon = 0$. Если $b > a$, то фокусы эллипса расположены на оси OY

(рисунок 25) и все введенные понятия большой и малой оси рассматриваются относительно этой оси координат. Прямые линии

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

называются директрисами эллипса (рисунок 26).

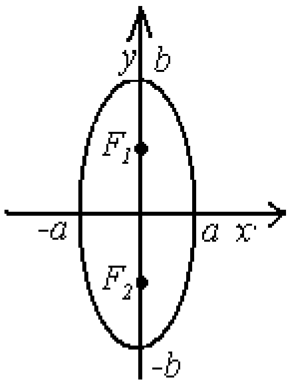


Рисунок 25

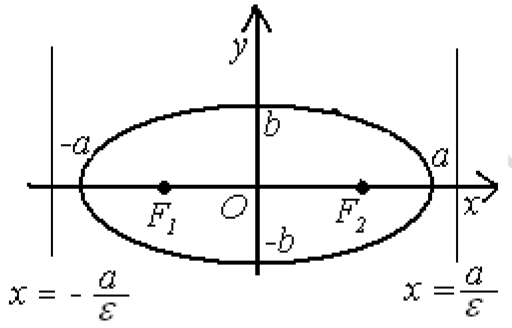


Рисунок 26

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между этими фокусами.

Выберем фокусы эллипса $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, лежащие на оси OX. Тогда расстояние между ними будет равно $2c$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы и $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ (рисунок 27).

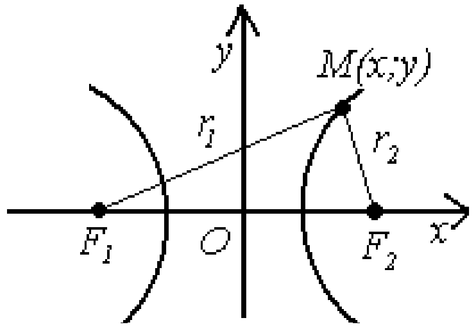


Рисунок 27

Тогда

$$|r_1 - r_2| = 2a < 2c,$$

то есть

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2.$$

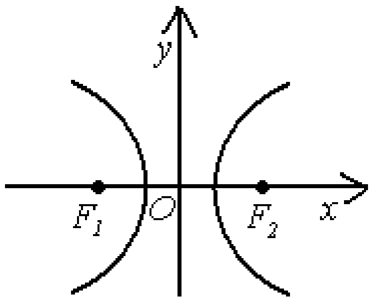


Рисунок 28

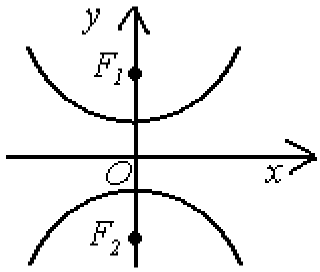


Рисунок 29

После преобразований, аналогичных выводу уравнений эллипса, мы получим следующее каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ $(c > a)$. Если $y = 0$, то $x = \pm a$, если $y = 0$, то $y^2 = -b^2$ и, следовательно, график не пересекает ось OY (рисунок 28). Гипербола, задаваемая уравнением

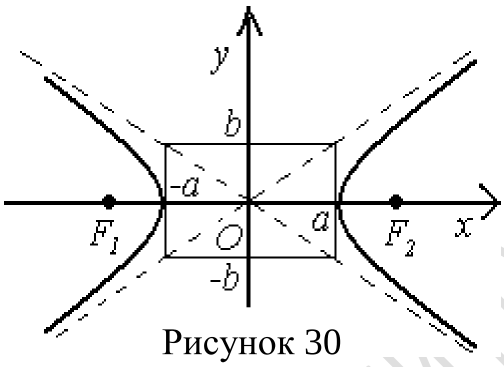


Рисунок 30

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

не пересекает ось OX (рисунок 29). Диагонали прямоугольника, задаваемого уравнениями $x = \pm a, y = \pm b$, являются асимптотами гиперболы, то есть прямыми, к которым неограниченно приближается график функции при удалении к бесконечности (рисунок 30). Уравнения этих асимптот имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней*, а направляющий прямоугольник является квадратом.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$$

называются *директрисами гиперболы*.

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой.

Расстояние от этой точки до директрисы называется *параметром параболы*.

Выберем фокус параболы $F(c;0)$, лежащим на оси OX, а директрису проведем перпендикулярно к этой оси. Пусть начало координат находится посередине между фокусом и директрисой. Тогда расстояние между ними будет равно р. Если $M(x;y)$ – произвольная точка параболы и $MF=d_1$, расстояние от точки M до директрисы равно d_2 (рисунок 31), то $d_1=d_2$, то есть

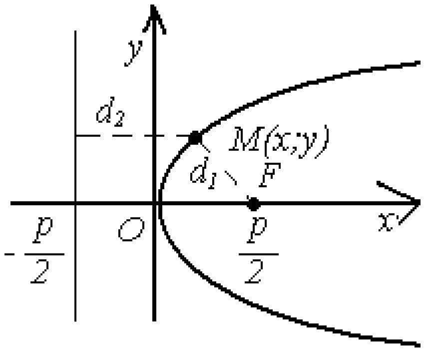


Рисунок 31

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\ y-0\ ^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\ y-y\ ^2},$$

или

$$x^2-Px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+Px+\frac{p^2}{4},$$

окончательно

$$y^2=2px.$$

Это и есть каноническое уравнение параболы. Так как расстояние от любой точки параболы до фокуса равно расстоянию до директрисы, то эксцентриситет параболы всегда равен 1.

Пример 12. Построить график параболы $y^2=3x$.

Решение. Так как $2p=3$, то уравнение директрисы имеет вид $y=-\frac{3}{2}$. Тогда фокус имеет координаты $(1{,}5;0)$ и искомый график изображен на рисунке 32.

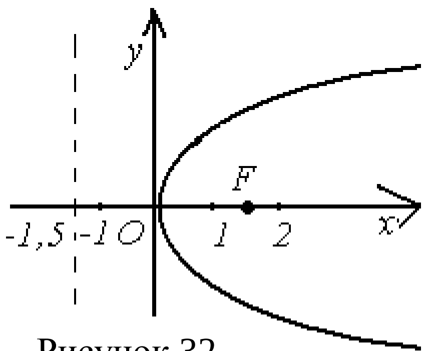


Рисунок 32

Таким образом, все кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола в некоторой системе координат могут быть записаны с помощью уравнения

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \text{ причем } A^2 + C^2 \neq 0.$$

Если при этом:

1) $A = C$, то уравнение задает окружность;

2) $A \cdot C > 0$ – уравнение определяет эллипс;

3) $A \cdot C < 0$ – уравнение определяет гиперболу;

4) $A \cdot C = 0$, то линия является параболой.

При этом возможны случаи, когда уравнение эллипса вырождается в точку или мнимый эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых линий

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Парабола вырождается в пару параллельных прямых линий

$$y = \pm b, x = \pm a.$$

4 Матрицы

4.1 Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

Пример 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В общем случае матрица может содержать m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m \times n}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*, где i указывает номер строки, j указывает номер столбца.

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots$ образуют *главную диагональ* матрицы. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*. Квадратная матрица размеров $n \times n$ называется *матрицей n-го порядка.*

Матрицы называются *равными*, если у них равны элементы, стоящие на соответствующих местах, то есть $A = B$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$, для всех $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме главной диагонали равны нулю, называется *диагональной*.

Пример 13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется *нулевой*.

Пример 14. $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент диагонали равен 1, называется *единичной***.**

Пример 15. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от диагонали, равны нулю.

Пример 16. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица, содержащая одну строку (столбец), называется *вектором* (*вектор-строкой, вектор-столбцом*).

Пример 17. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* (A^T).

Пример 18. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Очевидно, что $(A^T)^T = A$.

4.2 Действия над матрицами

Матрицы одинаковых размерностей можно складывать и вычитать. Если $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$, то $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Пример 19. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый ее элемент умножить на это число.

Пример 20. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $3A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Матрица $-A = (-1)A$ называется *противоположной* к матрице A.

Умножение матриц

Умножение матриц $A \times B$ возможно только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Тогда справедливо соотношение $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$, причем элементы матрицы C равны $C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$, $i = \overline{1,m}$,

$k = \overline{1,p}$. Другими словами, строки матрицы A умножаются на столбцы матрицы B.

Пример 21. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot5 & 2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot4+3\cdot6 \\ 3\cdot3+4\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot1 & 3\cdot4+4\cdot6 \\ 5\cdot3+1\cdot1 & 5\cdot2+1\cdot1 & 5\cdot4+1\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 26 \\ 29 & 10 & 36 \\ 16 & 11 & 26 \end{pmatrix},$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3\cdot2+2\cdot3+4\cdot5 & 3\cdot3+2\cdot4+4\cdot1 \\ 5\cdot2+3\cdot1+6\cdot5 & 5\cdot3+1\cdot4+6\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 21 \\ 43 & 25 \end{pmatrix}.$$

Видим, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$. Если же выполняется условие $A \times B = B \times A$, то матрицы A и B называются *перестановочными друг с другом.*

Матрица называется *ступенчатой*, если для её элементов выполняются условия:

1) под первым ненулевым элементом каждой строки находится 0;

2) первый ненулевой элемент любой строки находится правее первого ненулевого элемента любой строки, расположенной выше.

Пример 22. Следующая матрица является ступенчатой

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1) перестановка местами двух любых её строк (столбцов);

2) умножение элементов какой-нибудь строки (столбца) на некоторое ненулевое число;

3) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой матрицы с помощью элементарных преобразований $(A \sim B)$.

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Определители

Определителем называется квадратная числовая таблица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

вычисляемая по определенным правилам.

Пример 23. Если $n = 1$, то $|a_{11}| = a_{11}$. Так $|-2| = -2$.

Если $n = 2$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Так, $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 10 \cdot 2 = 21 - 20 = 1$.

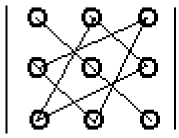
Если $n = 3$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

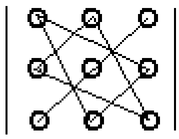
Так,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 6 - 5 \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

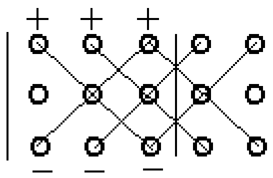
При вычислении определителей 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников. Так, с плюсом берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и элементы, стоящие в вершинах следующих треугольников:



С минусом берутся произведения элементов, стоящих на второй диагонали и в вершинах следующих треугольников:



Второй метод заключается в том, что рядом с определителем справа записываются первый и второй столбцы, и тогда с плюсом берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и двух ей параллельных, с минусом – произведения элементов, стоящих на второй диагонали и двух ей параллельных.



Вычисление определителей более высоких порядков осуществляется путем использования их свойств.

Пусть дана квадратная матрица A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из элементов этой матрицы можно составить определитель, который называется детерминантом матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = detA.$$

Минором M_{ij} некоторого элемента определителя a_{ij} называют определитель, который получается вычеркиванием из него i-строки и j-столбца. Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называют число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Например

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2.$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот, то есть $|A| = |A^T|$.

2. Определитель меняет знак при перестановке любых двух его строк (столбцов).

3. Определитель, имеющий две равные строки (столбца), равен нулю.

4. Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя, например

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

5. Если элементы какой-нибудь строки (столбца) представимы в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, например

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1+4 \\ 4 & 7 & 1+8 \\ 6 & 3 & 10+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель не изменится, если к какой-нибудь строке (столбцу) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на некоторое ненулевое число.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{(I=I+II)}.$$

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь его строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 \\ 9 & 11 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 2 \\ 3 & 11 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -159.$$

Для вычисления определителя мы использовали разложение по второй строке, так как она содержит большее число нулевых элементов.

9. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на соответствующее алгебраическое дополнение другой строки (столбца) равна нулю.

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Матрица B называется *обратной* к матрице A, если выполняется следующее условие:

$$B \times A = A \times B = E, \text{где } E \text{ – единичная матрица.}$$

В этом случае обозначают $B = A^{-1}$.

Теорема 1. *Всякая невырожденная матрица имеет свою обратную матрицу.*

Доказательство. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем $detA \neq 0$. Составим матрицу B следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{ij} матрицы A. Найдем произведение $A \times B$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & \dots & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & \dots & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & \dots & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

На диагонали полученной матрицы стоят суммы произведений элементов строк на их алгебраические дополнения. По свойству 8 они равны определителю матрицы A. На остальных местах стоят суммы произведений элементов строк на соответствующие алгебраические дополнения элементов других строк. По свойству 9 все они равны нулю. Поэтому

$$A \times B = \begin{pmatrix} detA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & detA & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & detA \end{pmatrix} = detA \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = detA \cdot E$$

Таким образом, $A \times B = detA \cdot E$. Аналогично можно получить равенство $B \times A = detA \cdot E$. Отсюда

$$\mathrm{A} \times \frac{B}{detA} = \frac{B}{detA} \times A = E.$$

По определению обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{B}{detA}.$$

Так как $detA \neq 0$, то матрица A^{-1} существует. Следовательно, матрица A имеет обратную матрицу. Теорема доказана.

Следствие: *Для произвольной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Есть другой способ вычисления обратной матрицы методом элементарных преобразований. Для матрицы A и единичной матрицы E

составляется расширенная матрица $(A|E)$, которая с помощью элементарных преобразований приводится к виду $(E|D)$. Можно показать, что в этом случае $D = A^{-1}$.

Пример 24. Найти обратную матрицу для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы

$$detB = 28 + 25 + 60 - 21 - 40 - 50 = 113 - 11 = 2.$$

Так как $detB \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4, A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 13, A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -11.$$

В соответствии со следствием из теоремы о существовании обратной матрицы, получим

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5 & 13 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2{,}5 & 6{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & -1{,}5 \\ 2 & 2{,}5 & -5{,}5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$B\times B^{-1}=\begin{pmatrix}2&5&1\\5&7&4\\3&5&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3&-2,5&6,5\\1&0,5&-1,5\\2&2,5&-5,5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6+5+2&-5+2,5+2,5&13-7,5-5,5\\-15+7+8&-12,5+3,5+10&32,5-10,5-22\\-9+5+4&-7,5+2,5+5&19,5-7,5-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2,5&6,5\\1&0,5&-1,5\\2&2,5&-5,5\end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы

1. $det(A^{-1})=(detA)^{-1}=\dfrac{1}{detA}$.

2. $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

3. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

Ранг матрицы

Пусть дана матрица размерности $m\times n$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов. $(k\le m, k\le n)$. Из элементов, стоящих на пересечении k строк и k, столбцов составим определитель k-го порядка. Все такие определители называют *минорами* матрицы.

Пример 25. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&2&5&4\\1&4&2&1\\3&4&3&2\end{pmatrix}$$

минорами второго порядка будут, например, определители

$$\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&4\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&4\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&5\\4&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&5\\3&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&4\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\4&2\end{vmatrix}.$$

Минорами третьего порядка – определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Всего для матрицы $A_{m\times n}$ можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров порядка k, где $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Так для матрицы $A_{3\times 4}$ существует всего

$$C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 3\cdot 3\cdot 2 = 18$$

миноров второго порядка.

Наибольший из порядков минора данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы*. Обозначаются как $r, r(A), rangA$.

Минор, порядок которого равен рангу матрицы, называют *базисным минором*. У каждой матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
2. Если из матрицы убрать нулевую строку (нулевой столбец), то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не меняется при выполнении элементарных преобразований.
4. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в любом её ступенчатом виде.

5 Системы линейных уравнений

5.1 Основные понятия

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется *системой* m *- линейных уравнений с* n *неизвестными*.

Числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются *коэффициентами системы*.

Числа b_i, $i = \overline{1,m}$ называются *свободными членами системы*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *переменными системы*. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

– *расширенной матрицей системы*. Матрицы–столбцы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– соответственно *матрицами свободных членов и неизвестных системы*. Тогда в матричной форме систему уравнений можно записать в виде

$$AX = B.$$

Решением системы называется n значений переменных

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n,$$

при подстановке которых в уравнения, все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства. Всякое решение системы можно представить в виде матрицы–столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

В этом случае справедливо матричное равенство $A \times C = B$.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если не имеет ни одного решения.

Решить систему линейных уравнений – это значит выяснить, совместна ли она и, в случае совместности, найти её общее решение.

Система называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет решение

$$x_1 = x_2 = \ \dots. \ = x_n = 0.$$

Теорема Кронекера – Копелли

Ответ на вопрос существования решений линейных систем и их единственности позволяет получить результат, который можно сформулировать в виде следующих утверждений относительно системы m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Теорема 2. Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной

$$(r)A = r(B).$$

Теорема 3. Если ранг основной матрицы совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 4. Если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Правила решения систем

1. Находят ранги основной и расширенной матрицы и, если $r(A) < r(B)$, то система не совместна.

2. Если $r(A) = r(B) = r$, то система совместна. В этом случае находят какой-нибудь базисный минор r-го порядка и берут соответ-

ствующие ему r- уравнений системы, отбрасывая остальные. Переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называются главными, остальные $n-r$ переменных называют свободными. Выражения со свободными переменными переносят в правую часть.

3. Находят выражение главных переменных через свободные и получают общее решение системы.

4. Придавая свободным переменным произвольные значения, получают все значения главных переменных.

5.2 Методы решения систем линейных уравнений

Метод обратной матрицы

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

причем $r(A) = r(B) = n$, то есть система имеет единственное решение. Запишем систему в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Умножим обе части матричного уравнения слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то получаем $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда получаем равенство для нахождения неизвестных

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 26. Методом обратной матрицы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Обозначим через A основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

тогда решение найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Вычислим A^{-1}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 12 - 2 - 4 - 9 = -8 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то $r(A) = r(B) = 3$ и система имеет единственное решение. Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \; A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \\ 5 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3 & -4 & 4\\ 1 & 4 & -7\\ 5 & 4 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6-12+10 & -9+4+5 & 3-8+5\\ 2+12-14 & 3-4-7 & -1+8-7\\ 10+12-22 & 15-4-11 & -5+8-11\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Обратная матрица найдена верно. Отсюда по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, найдем матрицу переменных X:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3 & -4 & 4\\ 1 & 4 & -7\\ 5 & 4 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4+20\\ 4-28\\ 4-44\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}16\\ -24\\ -40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$

Сравнивая значения матриц, получим ответ:

$$x_1=-2;\ x_2=3;\ x_3=5.$$

Метод Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,.\,.\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

причем $r(A)=r(B)=n$, то есть система имеет единственное решение.

Запишем решение системы в матричном виде $X=A^{-1}\cdot B$, или

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta}, x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta}, \dots$$

$$\dots, x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Обозначим

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1,$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2,$$

. . . . ,

$$A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n.$$

Таким образом, получаем формулы для нахождения значений неизвестных, которые называются *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример 27. Решить методом Крамера следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 6 - 32 - 4 + 18 + 32 = 20 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то $r(A) = r(B) = 3$, система имеет единственное решение.

Найдем остальные определители для формул Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 9 - 8 - 1 + 30 + 48 = 80,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36 - 2 - 40 + 12 + 6 + 40 = -20,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 30 + 48 + 20 - 27 - 8 = 60.$$

По формулам Крамера находим значения переменных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{80}{20} = 4, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{20} = -1, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{20} = 3.$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Метод Гаусса

Метод заключается в последовательном исключении переменных. Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе расширенная матрица системы B приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & c_{1k+1} & \dots & d_1 \\ \dots & c_{22} & \dots & c_{2k} & c_{2k+1} & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{kk} & c_{kk+1} & \dots & d_k \end{pmatrix}, \text{ где } k \le n.$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k + c_{1kk+1}x_{k+1} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \dots + c_{2k}x_k + c_{2kk+1}x_{k+1} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c_{1k}x_k + c_{1kk+1}x_{k+1} + \dots + c_{kn}x_n = d_k . \end{cases}$$

После этого переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ считаются свободными и в каждом уравнении переносятся в правую часть.

На втором этапе из последнего уравнения выражается переменная x_k, и полученное значение подставляется в $k-1$ уравнение. Из данного уравнения выражается переменная x_{k-1}. Этот процесс продолжается до первого уравнения. В результате получается выражение главных переменных $x_1, x_{2,}, \dots, x_k$ через свободные переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$.

Пример 28. Решить методом Гаусса следующую систему трех линейных уравнений, имеющей четыре неизвестных:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -12 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -9 & -33 \end{pmatrix}.$$

Так как $r(A) = r(B) = 4$ больше числа неизвестных, то система совместна и имеет бесконечное множество решений. Запишем систему для ступенчатой матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12, \\ \qquad\quad -8x_3 - 9x_4 = -33. \end{cases}$$

Определитель расширенной матрицы этой системы, составленный из трех первых столбцов не равен нулю, поэтому его считаем базисным. Переменные x_1, x_2, x_3 , будут базисными, а переменная x_4 – свободной переменной. Перенесем ее во всех уравнениях в левую часть

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2x_4 + 5, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 = 3x_4 - 12, \\ \qquad\quad -8x_3 = 9x_4 - 33. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражаем x_3,

$$x_3 = \frac{33}{8} - \frac{9}{8}x_4.$$

Подставив это значение в предпоследнее второе уравнение, получим следующие значения переменной x_2:

$$3x_2 - 5\left(\frac{33}{8} - \frac{9}{8}x_4\right) = 3x_4 - 12,$$

$$3x_2 - \frac{165}{8} + \frac{45}{8}x_4 = 3x_4 - 12,$$

откуда окончательно

$$x_2 = -\frac{7}{8}x_4 + \frac{23}{8}.$$

Подставив значения переменных x_2 и x_3 в первое уравнение, найдем значение переменной x_1

$$x_1 = -\frac{7}{8}x_4 + \frac{15}{8}.$$

Ответ запишем в следующем виде:

$$x_1 = -\frac{7}{8}t + \frac{15}{8}, \qquad x_2 = -\frac{7}{8}t + \frac{23}{8}, \quad x_3 = -\frac{9}{8}t + \frac{33}{8}, x_4 = t, t \in R.$$

Литература

1 Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под общ. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 471 с.

2 Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник для студентов вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

3 Общий курс высшей математики для экономистов / Б. М. Рудык [и др.]; под общ. ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА, 2002. – 656 с.

4 Гусак, А. А. Высшая математика: учебник для студ. вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Тетра Системс, 2001. – Т. 1. – 544 с. – Т. 2. – 448 с.

5 Гусак, А. А. Задачи и упражнения для высшей математике : учебное пособие для студ. естествен. спец. вузов : в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Высшая школа, 1988. – Ч. 1. – 247 с. – Ч. 2. – 228 с.

6 Письменный, Д. П. Конспект лекций по высшей математике : в 3 ч., Ч. 1 / Д. П. Письменный. – М. : Рольф, 2000. – 288 с.

7 Белько, И. В. Высшая математика для экономистов. I семестр : Экспресс–курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М. : Новое издание, 2002. – 140 с.

8 Минюк, С. А. Высшая математика : учебное пособие для студ. экономич. спец. высш. учеб. заведений / С. А. Минюк, Е. А. Ровба. – Гродно : ГрГУ, 2004. – 407 с.

Производственно-практическое издание

Лемешев Валерий Петрович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 02.11.2017. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 847.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.