Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(45), 2007

УДК 512.54

X_m-полуперестановочные подгруппы конечных групп

В. О. Лукьяненко, А. Н. Скиба

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа H группы G называется добавляемой в G, если группа G содержит такую подгруппу K (добавление к H в G), что $G = HK$. Мы будем говорить, что подгруппа B группы G является минимальным добавлением к подгруппе A в G, если $G = AB$, но $G \neq AB_1$ для любой собственной подгруппы B_1 из B.

Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда подгруппа A группы G называется *перестановочной с подгруппой* B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется перестановочной [20] или квазинормальной [35] подгруппой в G. Изучение перестановочных подгрупп было начато в классической работе Оре [35], где было доказано, что если А — квазинормальная подгруппа группы G, то А субнормальна в G. В своей работе [28] Холл доказал, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда для любых двух холловских подгрупп А и В этой группы подгруппа А перестановочна с некоторой сопряженной с В подгруппой. Подгруппы, перестановочные с силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$, также изучались в работе С.А. Чунихина [9] (см. также монографию [10]). Отметим, что подгруппы такого типа были названы позднее в работе Кегеля [34] π-квазинормальными. В 60-70-х годах прошлого столетия появились ряд ключевых работ по теории перестановочных подгрупп, которые предопределили основные направления развития теории перестановочных подгрупп в последующие годы. Уточняя отмеченный выше результат Оре, Ито и Сеп в работе [32] доказали, что для каждой перестановочной подгруппы H группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. В другом направлении этот результат Оре получил развитие в работах Кегеля [34] и Дескинса [19]. Кегель доказал, что любая π-квазинормальная π-подгруппа является субнормальной и показал, что π-квазинормальные субнормальные подгруппы группы G образуют (в общем случае собственную) подрешетку решетки всех субнормальных подгрупп группы G [34]. Первый из этих двух результатов Дескинс обобщил следующим образом: если G порождается своими π-элементами и π-подгруппа H группы G π-квазинормальна в G, то факторгруппа H/H_G нильпотентна. В этой же работе Дескинс высказал предположение о том, что если группа G нильпотентна, то для каждой ее квазинормальной подгруппы Q факторгруппа Q/Q_G абелева. Отрицательное решение этой задачи было получено Томпсоном в работе [39].

Пусть $\emptyset \neq X \subseteq G$, тогда мы будем говорить, следуя [37], что подгруппа A *X-перестановочна с* B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X$. Подгруппа A группы G называется *X-перестановочной в* G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами из G. Значение понятия X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочных подгрупп. Заметим, что 1–перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с G-перестановочными подгруппами. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе [37] и они уже нашли ряд интересных приложений [3, 21, 22, 37]. Подгруппа A группы G называется *X-полуперестановочной в* G [26], если A X-перестановочна со всеми подгруппами некоторого своего добавления в G. В данной работе мы анализируем следующее более общее понятие

Определение 1. Пусть A — подгруппа группы G и X — непустое подмножество в G. Тогда мы говорим, что A является *X_m-полуперестановочной подгруппой в* G [23], если A X-перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы некоторого своего минимального добавления в G.

В частности, если подгруппа A является 1_m-полуперестановочной подгруппой в группе G, тогда мы говорим, что подгруппа A m-полуперестановочна в G.

Пример 2. Пусть $B = D_m = \langle x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle$ — диэдральная группа порядка 2^m, где $m > 2$, и $L = \langle y\rangle$. Согласно [15, лемма 3.3.12 на стр.158], существует такая 2-группа P, что $B \leq P'$ и, следовательно, $B \leq \Phi(P)$. Таким образом, группа P является единственным минимальным добавлением к подгруппе L в P. Следовательно, подгруппа L является X_m-полуперестановочной, но не X-полуперестановочной подгруппой в P. Значит, класс X_m-полуперестановочных подгрупп в общем случае шире, чем класс X-полуперестановочных подгрупп.

Множество всех минимальных добавлений T к подгруппе A в группе G таких, что подгруппа A X-перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы из T, мы обозначим через $X_m(A)$. Таким образом, подгруппа A является X_m-полуперестановочной в G в том и только в том случае, когда $X_m(A) \neq \emptyset$.

В данной работе на основе понятия X_m-полуперестановочности мы даем новые критерии сверхразрешимости групп. Наш первый результат связан с так называемыми 2-максимальными подгруппами. Подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой [41, стр.24] или иначе второй максимальной подгруппой в G [30], если в G найдется такая максимальная подгруппа M, в которой H является максимальной подгруппой. Аналогично определяют 3-максимальные (третьи максимальные) подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т.д. Отношение между свойствами максимальных подгрупп группы G и строением группы G исследовалось многими авторами (см. [11], [41]). Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Это связано, прежде всего, с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп. Отметим, например, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны; сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы всех ее максимальных подгрупп просты (Хупперт [30]); разрешима тогда и только тогда, когда у любой ее максимальной подгруппы нормальный индекс совпадает с обычным индексом (Дескинс [17], [18]). Отметим также, что максимальные подгруппы лежат в основе многих важных признаков принадлежности группы выделенному классу групп. Наиболее известными результатами в этом направлении являются теорема Дескинса-Томпсона-Янко о том, что группа разрешима, если она обладает максимальной нильпотентной подгруппой, у которой класс нильпотентности силовских 2-подгрупп не превосходит 2 [29, IV, 7.4], и теорема О.Ю. Шмидта о разрешимости группы, у которой все максимальные подгруппы нильпотентны [12]. Отметим также, что разрешимость групп, у которых все максимальные подгруппы сверхразрешимы, была установлена Хуппертом [30].

Значительно меньше мы знаем о влиянии 2-максимальных, 3-максимальных и т.д подгрупп на строение основной группы. Тем не менее, интересно использовать некоторую информацию о таких подгруппах группы, чтобы определить строение самой группы. Первый результат в этом направлении был получен Хуппертом в [30], где было доказано, что группа сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны. В дальнейшем этот результат был развит в нескольких направлениях. В частности, сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все вторые максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами была установлена Агровалем [13], а в работе [7] Л.А. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы, и установил разрешимость групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами (см. также работы Э.М. Пальчика [6] и В.Д. Чертка [8]).

Оказалось, что группы, у которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны, не обязательно разрешимы и полное описание групп с таким свойством в неразрешимом случае было получено Янко [33], а в разрешимом случае В.А. Белоноговым [1]. Группы, у которых все 3-максимальные подгруппы абелевы, были описаны Я.Г. Берковичем в работе [2]. Эти результаты получили развитие в работе В.Н. Семенчука [36], который дал полное описание разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. Полное описание групп, у которых 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми 3-максимальными подгруппами, было получено в работе [5]. Разрешимость групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является CAP-подгруппой, была доказана Го Шуином и К.П. Шамом в [27]. В работе [22] Веньбинь Го, К.П. Шам и А.Н. Скиба доказали, что группа G сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа G-перестановочна со всеми подгруппами из G. Наконец отметим, что Веньбинь Го, К.П. Шам и А.Н. Скиба в работе [26] доказали, что группа нильпотентна в том и только в том случае, когда каждая 2-максимальная подгруппа непримарного индекса $F(G)$-перестановочна с каждой подгруппой некоторого своего нильпотентного добавления (подгруппа M группы G имеет непримарный индекс, если $|G:M|$ делится по крайней мере на два различных простых числа).

В связи с приведенными выше критериями сверхразрешимости групп естественно попытаться найти такие условия для 2-максимальных подгрупп, которые приведут нас к точному описанию сверхразрешимости группы. Решение такой задачи дает

Теорема A. *Пусть G — группа, $X = F(G)$, $\Sigma_G = \{M \mid M$ — 2-максимальная подгруппа из G, имеющая непримарный индекс $|G:M|$, и $M/M_G \cap F(G/M_G) = 1\}$ и $\Delta_G = \{M \mid M$ — 2-максимальная подгруппа из G, имеющая непримарный индекс $|G:M|$, и $\Phi(G) \leq M \cap X < X\}$. Тогда группа G сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

(a) Каждый элемент M из Σ_G является X_m-полуперестановочным в G и множество $X_m(M)$ содержит сверхразрешимую группу;

(b) Пусть N — произвольная нормальная подгруппа в G. Если $\Delta_{G/N} \neq \emptyset$, тогда существует такой элемент $M/N \in \Delta_{G/N}$, что подгруппа M/N является $F(G/N)_m$-полуперестановочной в G/N и множество $F(G/N)_m(M/N)$ содержит сверхразрешимую группу.

Следствие 3. *Если каждая 2-максимальная подгруппа M группы G, имеющая непримарный индекс $|G:M|$, является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(M)$ содержит сверхразрешиму группу, то группа G сверхразрешима.*

Используя теорему A можно получить следующую новую характеризацию нильпотентной группы

Следствие 4. *Группа G нильпотентна в том и только в том случае, когда каждая 2-максимальная подгруппа группы G, имеющая непримарный индекс в G, является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и каждая минимальная подгруппа из G содержится в гиперцентре своего нормализатора.*

В связи с теоремой А интересно получить описание групп, в которых все 2-максимальные подгруппы непримарного индекса являются $F(G)_m$-полуперестановочными в G.

Теорема B. *Каждая 2-максимальная подгруппа M группы G, имеющая непримарный индекс $|G : M|$, является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(M)$ содержит сверхразрешимую группу в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

(a) Группа G сверхразрешима;

(b) Если $\bar{P}$ — максимальная подгруппа силовской p-подгруппы из $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ для любого элемента $p \in \pi(G)$, тогда $N_{\bar{G}}(\bar{P})$ не является максимальной подгруппой в $\bar{G}$.

При доказательстве теорем A и B существенно использовались следующие леммы

Лемма 5. *Пусть A, B — подгруппы группы G, $\emptyset \neq X \subseteq G$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) Если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A [37].

(2) Если A X-перестановочна с B, то A^x X^x-перестановочна с B^x для всех $x \in G$ [37].

(3) Если A X-перестановочна с B, то AK/K XK/K-перестановочна с BK/K в G/K [37].

(4) Пусть $K \leq A$. Тогда A/K XK/K-перестановочна с BK/K в том и только том случае, когда A X-перестановочна с B [37].

(5) Если A X-перестановочна с B и $X \leq M \leq G$, то A M-перестановочна с B [37].

(6) Если A X-перестановочна с B и $X \leq N_G(A)$, то A перестановочна с B [37].

(7) Если F — перестановочная подгруппа группы G и A X-перестановочна с B, то AF X-перестановочна с B [37].

(8) Если $A \leq T$, где T — субнормальная подгруппа (разрешимой) группы G и A G-перестановочна со всеми силовскими (холловскими) подгруппами из G, то A T-перестановочна с каждой силовской (холловской) подгруппой из T [4].

(9) Пусть $G = AT$ и T_1 — подгруппа группы T. Предположим, что A G-перестановочна с T_1. Тогда A T-перестановочна с T_1 [4].

(10) Если A — максимальная подгруппа в G и $T \in G_m(A)$, тогда $T =< a >$ — циклическая p-группа для некоторого простого числа p и $a^p \in A$ [4].

Лемма 6. *Пусть A, X — подгруппы группы G и $H \trianglelefteq G$. Пусть $T \in X_m(A)$ и либо $H \leq A$, либо $H \leq T$. Если H — абелева минимальная нормальная подгруппа в G, либо $(|H|, |T|) = 1$, либо подгруппа T разрешима, тогда $TH/H \in (XH/H)_m(AH/H)$.*

Лемма 7. *Пусть $E \leq M \leq G$, где M — максимальная подгруппа группы G, и E — максимальная подгруппа в M. Пусть множество $1_m(E)$ содержит сверхразрешимую группу. Тогда индекс $|G : M|$ прост и либо индекс $|G : E|$ примарен, либо индекс $|M : E|$ прост.*

Будем говорить, что 2-максимальная подгруппа E группы G является 2-максимальной подгруппой специального типа, если факторгруппа G/E_G сверхразрешима и $|F(G/E_G)| = |O_p(G/E_G)| > p$ для некоторого простого p.

Лемма 8. *Пусть G — группа и X — нормальная разрешимая подгруппа в G. Тогда группа G разрешима, если для каждой ее 2-максимальной подгруппы E такой, что E не является c-квазинормальной в G и не является подгруппой специального типа, множество $X_m(E)$ содержит сверхразрешимую группу.*

Хорошо известно, что если группа G сверхразрешима, тогда $G/O_{p',p}(G)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$ для любого простого числа p. Следующая теорема показывает, что каждая такая факторгруппа также является циклической, если дополнительно поставить условие, что каждая силовская подгруппа из G является $F(G)_m$-полуперестановочной в G.

Теорема C. *Если каждая силовская подгруппа P группы G является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(P)$ содержит разрешимую группу, тогда группа G сверхразрешима и $G/O_{p',p}(G)$ — циклическая группа для любого простого числа p.*

При доказательстве теоремы C существенно использовались леммы 5 и 6, а также следующий результат

Лемма 9. *Пусть $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ — набор силовских подгрупп группы G (по одной для каждого простого делителя порядка G), где P_i — p_i-группа и $p = p_1$ — наименьший простой делитель $|G|$. Пусть $X = F(G)$. Если все максимальные подгруппы из P_1 X-перестановочны со всеми подгруппами из Σ, то группа G p-нильпотентна.*

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [31], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа G является свехразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее Сринивазан доказал [38], что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Этих два результата получили развитие в исследованиях многих авторов. В частности, в работе [40] был получен аналог отмеченного результата работы [38] для c-нормальных подгрупп. Асаад и Хелиел доказали [14], что группа G является сверхразрешимой, если G имеет такой набор силовских подгрупп Σ (содержащий в точности одну силовскую p-подгруппу для каждого простого делителя p ее порядка $|G|$), что каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из Σ перестановочна со всеми членами Σ. Сверхразрешимость группы G, в которой все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из G дополняемы в G была доказана Болестером-Болинше и Го Шуином в работе [16]. В работе [24] (см. также [3]) была доказана сверхразрешимость группы G при условии, что G разрешима и G имеет такую нормальную подгруппу со сверхразрешимой факторгруппой G/N, что все ненормальные в G максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ обладают сверхразрешимыми добавлениями в G. Отметим наконец, что в работе [25] было доказано, что группа G является сверхразрешимой в том и только в том случае, когда все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G $F(G)$-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G.

Нами установлен следующий новый результат в этом направлении

Теорема D. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа R любой силовской подгруппы из G, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(R)$ содержит разрешимую группу.*

Следствие 10 [24]. *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, нормальны в G, тогда группа G сверхразрешима.*

Следствие 11 [38]. *Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны в G, тогда группа G сверхразрешима.*

Пример группы A_4 показывает, что в общем случае группа G, в которой все 2-максимальные подгруппы силовских подгрупп из G являются нормальными в G, не обязательно сверхразрешима. Тем не менее, мы имеем следующий результат

Теорема E. *Пусть G — группа и p — наименьший простой делитель порядка $|G|$. Если группа G A_4-свободна, каждая 2-максимальная подгруппа R любой силовской p-подгруппы из G является $F(G)_m$-полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(R)$ содержит разрешимую группу, тогда группа G p-нильпотентна.*

Следствие 12. *Если группа G A_4-свободна и каждая 2-максимальная подгруппа любой силовской p-подгруппы группы G является $F(G)_m$-полуперестановочной в G для любого $p \in \pi(G)$, тогда группа G дисперсивна по Оре.*

При доказательстве теоремы E существенно использовались леммы 5 и 6, а также следующий результат

Лемма 13. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G. Предположим, что G A_4-свободна и L — нормальная подгруппа в G. Если факторгруппа G/L p-нильпотентна и $p^3 \nmid |L|$, тогда группа G p-нильпотентна.*

Abstract. The paper considers X_m–semi permutable subgroups of finite groups. Let X be a non-empty subset of a group G. Then we call a subgroup A of G a X_m–semi permutable subgroup of G if A has a minimal supplement T in G such that for every maximal subgroup M of any Hall subgroup T_1 of T there exists an element $x \in X$ such that $AM^x = M^xA$. In this paper, we study the finite groups with given systems of X_m-semi permutable subgroups.

Литература

1. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 21–32.

2. Беркович, Я.Г. Конечные неразрешимые группы с абелевыми третьими максимальными подгруппами / Я.Г. Беркович // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. — 1969. — № 7. — С. 10–15.

3. Го, В. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп / Веньбинь Го, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 75–92.

4. Го, В. X-Перестановочные подгруппы / Веньбинь Го, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сиб. мат. журнал. — 2007. — Т. 4, № 61. — С. 742–759.

5. Легчекова, Е.Н. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.Н. Легчекова, А.Н. Скиба // Доклады НАН Р. — 2006. — Т. 50, № 3. — С. 1012–1017.

6. Пальчик, Э.М. О группах, все i-максимальные подгруппы которых перестановочны с силовской подгруппой / Э.М. Пальчик // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. наук. — 1968. — № 1. — С. 45–48.

7. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы (Гом. сем.) / Ин-т мат. АН БССР; под ред. Е. Волкинда. — Минск, 1966. — С. 75–88.

8. Черток, В.Д. Порождение конечной группы системами недостижимых подгрупп / В.Д. Черток // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. наук. — 1967. — № 2. — С. 80–84.

9. Чунихин, С.А. Об условиях теорем типа Силова / С.А. Чунихин // ДАН СССР. — 1949. — Т. 69, № 6. — С. 735–737.

10. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. — Минск: Наука и техника, 1964. — 158 с.

11. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М.: Наука, 1978.

12. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. — 1924. — Т. 31. — С. 366—372.

13. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agraval // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — № 54. — P. 13—21.

14. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // Arch. Math. — 2002. — № 80. — P. 113—118.

15. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. — Springer, Dordrecht, 2006.

16. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch.Math. — 1999. — № 72. — P. 161—166.

17. Deskins, W.E. A note on the index complex of maximal subgroup / W.E. Deskins // Arch. Math. — 1990. — Vol. 54. — P. 236—240.

18. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. — 1959. — № 1. — P. 100—104.

19. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. — 1963. — Vol. 82. — P. 125—132.

20. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin–New York: Walter de gruyter, 1992.

21. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups / W. Guo [и др.]. — Гомель, 2002. — № 10. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).

22. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. — 2005. — Vol. 29, № 2. — P. 240—254.

23. Guo, W. Finite Groups with given X_m-semipermutable Subgroups / W. Guo [и др.]. — Гомель, 2007. — № 10. — 15 с. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).

24. Guo, W. G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Israel J. of Math. — 2003. — № 138. — P. 125—138.

25. Guo, W. X-permutable maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Ukrain. Matem. J. — 2006. — Vol. 58, № 10. — P. 1299—1309.

26. Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra, (принята к опубликованию в 2007 году).

27. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2003. — № 181. — P. 297—308.

28. Hall, P. A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. — 1937. — Vol. 12. — P. 198—200.

29. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

30. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — № 60. — P. 409—434.

31. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math.

— 1961. — № XII. — P. 161—169.

32. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math. — 1962. — Vol. 23. — P. 168—170.

33. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zwein-maximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. — 1962. — № 79. — P. 422—424.

34. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78. — P. 205—221.

35. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5. — P. 431—460.

36. Semenchuk, V.N. Soluble groups with supersoluble second maximal subgroups / V.N. Semenchuk // Проблемы алгебры; Университетское. — Минск, 1985.

37. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 2003. — № 4(19). — С. 37—39.

38. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. — 1980. — № 35. — P. 210—214.

39. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups / J.G. Thompson // Math. Z. — 1967. — Vol. 96, № 2. — P. 226—227.

40. Wang, Y. C-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. — 1996. — № 180. — P. 954—965.

41. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein — Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982. — 382 p.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 17.07.07