Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **2**, 2006

УДК 539.12

Аналитические вычисления для амплитуд процессов с участием элементарных частиц

В. В. Андреев, А. М. Сейтлиев

1. Введение

В данной работе представлена новый метод для аналитических вычислений амплитуд процессов как с безмассовыми фермионами, а так и с массивными фермионами произвольной поляризации.

При современном развитии вычислительной техники появились возможности создания программных продуктов позволяющих производить расчет реакций элементарных частиц с достаточно малой затратой рабочего времени. Одной из таких программ является пакет FeynArts/FormCalc [1-2], который предназначен для генерации и визуализации диаграмм Фейнмана – графической характеристики реакций элементарных частиц. В возможности этой программы также входит генерация аналитической формы записи для амплитуды реакции.

Цель работы состоит в описании метода аналитических вычислений матричных элементов и программного модуля, предназначение которого заключается в аналитическом расчете сечений реакций элементарных частиц. При этом за основу берется аналитическая форма записи для амплитуды реакции элементарных частиц, полученная при помощи FeynArts/FormCalc .

Созданный пакет получил название MBSCalc, в основу алгоритма его программного кода был положен метод расчета матричных элементов получивший название метода базисных спиноров. Этот метод не использует явный вид биспиноров и γ-матриц Дирака, а также операцию вычисления шпуров [3]. В результате его применения выражение для амплитуды реакции сводится к комбинации скалярных произведений импульсов, векторов поляризаций частиц и векторов изотропной тетрады.

2. Метод базисных спиноров

В пространстве Минковского введем ортонормированные 4-вектора, которые удовлетворяют следующим соотношениям [3]:

$$l_0^{\mu} \cdot l_0^{\nu} - l_1^{\mu} \cdot l_1^{\nu} - l_2^{\mu} \cdot l_2^{\nu} - l_2^{\mu} \cdot l_2^{\nu} = g^{\mu\nu}, \ \ (l_A \cdot l_B) = g_{AB}$$

где g – метрический тензор.

С помощью векторов l_A (A=0, 1, 2, 3) можно определить светоподобные вектора, которые формируют изотропную тетраду в пространстве Минковского:

$$b_{\rho} = (l_0 + \rho l_3)/2, \quad n_{\lambda} = (\lambda l_1 + i l_2)/2, \quad (\rho, \lambda = \pm 1).$$

Метод базисных спиноров основан на использовании базисных векторов изотропной тетрады вида:

$$(b_{\pm 1})_{\mu} = (1/2)\{1, 0, 0, \pm 1\}, \ (n_{\pm 1})_{\mu} = (1/2)\{0, \pm 1, i, 0\}$$

$$\tilde{b}_{\pm 1} = 2b_{\pm 1}, \ \tilde{n}_{\pm 1} = 2n_{\pm 1}.$$

И связанных с ним базисных спиноров $u_{\lambda}(b_{-1})$, $u_{\lambda}(b_1)$, которые вводятся при помощи соотношений

$$\not{b}_{-1} u_{\lambda}(b_{-1}) = 0, \ u_{\lambda}(b_1) \equiv \not{b}_{-1} u_{\lambda}(b_{-1}), \quad \omega_{\lambda} u_{\lambda}(b_{\pm 1}) = u_{\lambda}(b_{\pm 1}) \qquad (1)$$

где матрица $\omega_{\lambda} = 1/2(1 + \lambda\gamma_5)$, и помимо этого выполняется $u_{\lambda}(b_{\pm 1})\bar{u}_{\lambda}(b_{\pm 1}) = w_{\lambda} b_{\pm 1}$.

Дираковские спиноры $w_\lambda^A(p,s_p)$ для массивных фермионов и антифермионов с 4-импульсом p и произвольной поляризацией s_p могут быть записаны через базисные спиноры при помощи следующего выражения:

$$w_\lambda^A(p,\,s)=\frac{(\hat{p}+Am_p)(1+\lambda\gamma_5\hat{s}_p)}{2\sqrt{(b_{-1}\cdot(p+m_p s_p))}}u_{-A\times\lambda}(b_{-1})=\frac{[\hat{\xi}_1^p+A\hat{\xi}_{-1}^p\hat{\xi}_1^p/m_p]u_{-A\times\lambda_p}(b_{-1})}{\sqrt{(\tilde{b}_{-1}\cdot\xi_1^p)}}= \\ =T_\lambda(p,\,s_p)u_{-A\times\lambda}(b_{-1}) \tag{2}$$

где $\xi_1^p=\dfrac{p\pm m_p s_p}{2}$.

Спинорное произведение для безмассовых базисных спиноров запишется как:

$$\bar{u}_\lambda(b_C)u_\rho(b_A)=\delta_{\lambda,-\rho}\delta_{C,-A}\,,\ C,A=\pm1,\ \lambda,\rho=\pm1. \tag{3}$$

Возникающие в ходе вычислений комбинации вида $S^n u_\lambda(b_A)$, где $S^n=\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}$, преобразуется к виду:

$$S^n u_\lambda(b_A)=B_{A,\lambda}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}u_{\lambda'_n}(b_{A'_n})-A\,N_{A,\lambda}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}u_{\lambda'_n}(b_{-A'_n}), \tag{4}$$

где

$$\lambda'_n=(-1)^n\lambda,\ A'_n=(-1)^n A,$$

а $B_{A,\lambda}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}$, $N_{A,\lambda}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}$ тензоры Лоренца, которые связаны с векторами изотропной тетрады :

$$B_{A,\lambda}^{\{\mu\}}=\tilde{b}_A^{\mu},\ \ N_{A,\lambda}^{\{\mu\}}=\tilde{n}_{-A\times\lambda}^{\{\mu\}}.$$

Как известно, при вычислении феймановской амплитуды, содержащей фермионы, то амплитуда соответствующей реакции представляется в следующем виде:

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}(p,s_p,k,s_k;Q)=M_{\lambda_p,\lambda_k}([p],[k];Q)=\bar{u}_{\lambda_p}(p,s_p)Qu_{\lambda_k}(k,s_k) \tag{5}$$

где λ_p и λ_k – поляризации внешних частиц с 4-импульсами $p,\ k$ и векторами произвольной поляризации s_p и s_k. Оператор Q представляет собой сумму произведений γ-матриц Дирака.

Основная идея метода базисных спиноров заключается в замене спиноров Дирака из предыдущего выражения (5) безмассовыми базисными спинорами (1) и использовании соотношений (3)–(4) для записи матричного элемента вида (5) через скалярные функции B и N. Так при помощи выражения (2) матричный элемент (5) может быть записан следующим образом:

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}(p,s_p,k,s_k;Q)=\bar{u}_{-\lambda_p}(b_{-1})T_{\lambda_p}(p,s_p)QT_{\lambda_k}(k,s_k)u_{-\lambda_k}(b_{-1})= \\ =M_{-\lambda_p,-\lambda_k}(b_{-1},b_{-1}:T_{\lambda_p}(p,s_p)QT_{\lambda_k}(k,s_k))$$

где оператор T_λ был определен в (2).

Рассмотрим важный вид матричного элемента (5), когда $p=b_{-C}$ и $k=b_A$ тогда:

$$M_{-o,\rho}(b_{-C},b_A;Q)\equiv\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}[Q]=\bar{u}_{-\sigma}(b_{-C})Qu_\rho(b_A).$$

Будем называть такого рода матричные элементы – базовыми матричными элементами, так как произвольный матричный элемент (5) является частным случаем базисного матричного элемента:

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}(p,s_p,k,s_k;Q)=\Gamma_{\lambda_p,-\lambda_k}^{1,-1}[T_{\lambda_p}(p,s_p)QT_{\lambda_k}(k,s_k)]. \tag{6}$$

Комбинация $\Gamma_{\lambda_p,-\lambda_k}^{1,-1}$ для произвольного количества γ-матриц представляется в виде:

$$\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n}]=\delta_{\sigma,\rho'_n}(\delta_{C,A'_n}B_{A,\rho}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}-A\delta_{C,-N_n}\,N_{A,\rho}^{\{\mu_1,\ldots\mu_n\}}) \tag{7}$$

3. Программный алгоритм MBSCalc

Работа программы разбита состоит их следующих этапов:

1. На первом этапе генерируются диаграммы с последующим получением для них обобщенной аналитической формы амплитуды реакции. Данная процедура реализуется с по-

мощью программного пакета FeynArts, который предназначен для генерации диаграмм Фейнмана – графической характеристики реакций элементарных частиц, визуализации такого рода диаграмм, и, наконец, в возможности этого приложения входит получение аналитической формы записи для амплитуды реакции. Таким образом, в ходе работы данного пакета мы получаем набор диаграмм и их амплитуды реакции в обобщенной форме.

2. Далее матричные элементы при помощи выражения (2) сводятся к их базисной форме (6) с безмассовыми базисными спинорами $u_\lambda(b_A)$.

3. Используя соотношение:

$$\gamma_5 u_\rho(b_A) = \rho\, u_\rho(u_A)$$

избавляемся от γ_5-матриц в фейнмановской амплитуде исследуемого процесса.

4. Затем при помощи выражения (7) матричный элемент представляется в виде скалярной функции, содержащей конструкции *B* и *N*.

5. Если матричный элемент содержит лоренцовских сверток между матрицами Дирака, то операция суммирования сводится к вычислению скалярных произведений векторов изотропной тетрады:

$$(\tilde{b}_C \tilde{b}_A) = 2\delta_{C,-A}\,,\ (\tilde{n}_\lambda \tilde{n}_\rho) = 2\delta_{\lambda,-\rho}\,,\ (\tilde{b}_C \tilde{n}_\lambda) = 0.$$

6. На последнем этапе происходит непосредственное вычисление искомого выражения для квадрата матричного элемента или сечения реакции. При этом на данном шаге задается кинематика процесса, причем пользователь может ее выбирать по собственному желанию, т.е. варьировать систему отсчета. В этом часто возникает необходимость, так как требуется получить наиболее удобные формы записи искомых величин, характеризующих данный процесс. То, что программа позволяет варьировать систему отсчета, повышает эффективность получения результата, а также позволяет рассмотреть проблему с различных точек зрения и выбрать вариант, наиболее устраивающий исследователя.

4. Пример

В качестве простейшего примера рассмотрим конструкцию следующего вида, содержащую безмассовые фермионы [4]:

$$M_{\lambda,\rho}(p,k;(g_V-\gamma_5 g_A)\not{q}) = \bar{u}_\lambda(p)(g_V-\gamma_5 g_A)\not{q}\,u_\rho(k)\,.$$

Используя вышеупомянутый алгоритм можно получить:

$$\bar{u}_\lambda(p)(g_V-\gamma_5 g_A)\not{q}\,u_\rho(k) = \frac{\bar{u}_{-\lambda}(b_{-1})\not{p}(g_V-\gamma_5 g_A)\not{q}\not{k}\,u_{-\rho}(\tilde{b}_{-1})}{\sqrt{(k\cdot\tilde{b}_{-1})(p\cdot\tilde{b}_{-1})}} =$$

$$= \frac{(g_V+\rho g_A)}{\sqrt{(k\cdot\tilde{b}_{-1})(p\cdot\tilde{b}_{-1})}}\bar{u}_{-\lambda}(b_{-1})\not{p}\not{q}\not{k}\,u_{-\rho}(\tilde{b}_{-1}) = \frac{(g_V+\rho g_A)\delta_{\lambda,\rho}B^{p,q,k}_{-1,-\lambda}}{\sqrt{(k\cdot\tilde{b}_{-1})(p\cdot\tilde{b}_{-1})}}$$

где конструкция $B^{p,q,k}_{-1,-\lambda}$ представляет комбинацию скалярных произведений векторов изотропной тетрады и физических векторов задачи p,q,k:

$$q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} q_3^{\mu_3} B^{\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}}_{A,\lambda} = B^{\{q_1,q_2,q_3\}}_{A,\lambda} = (q_3\cdot\tilde{b}_A)Y^{q_1,q_2}_{-A,-\lambda} + (q_3\cdot\tilde{n}_{-A\times\lambda})X^{q_1,q_2}_{A,-\lambda}\,.$$

Конструкции $Y^{q_1,q_2}_{-A,-\lambda}$ и $X^{q_1,q_2}_{A,-\lambda}$ запишутся следующим образом:

$$X^{\mu,\nu}_{A,\lambda} = \tilde{b}^\mu_A\cdot\tilde{n}^\nu_{-A\times\lambda} - \tilde{n}^\nu_{-A\times\lambda}\cdot\tilde{b}^\nu_A\,,\quad Y^{\mu,\nu}_{A,\lambda} = \tilde{b}^\mu_{-A}\cdot\tilde{b}^\nu_A + \tilde{n}^\mu_{A\times\lambda}\tilde{n}^\nu_{-A\times\lambda}\,.$$

5. Заключение

Таким образом, программа MBSCalc предназначенная для аналитических вычислений амплитуд процессов может быть использована для реакций с безмассовыми и массивных фермионами. В основу ее алгоритма положен метод базисных спиноров, при этом не используется явный вид биспиноров и γ-матриц Дирака, а также операция вычисления шпуров. В результате выражение для амплитуды реакции сводится к комбинации скалярных произведений импульсов, векторов поляризаций частиц и векторов изотропной тетрады. Минимальное количество операций и простой алгоритм метода делает его эффективным и несложным в расчетах.

Abstract. There are a lot of program products for different physical evaluations in today scientific world. The method of basis spinor for evaluation elementary particles reactions was used for calculation of matrix elements and cross-sections for these reactions. Program MBSCalc are used this method. It allows getting expressions for amplitudes and cross-sections of processes involving both massive fermions of an arbitrary polarization and massless fermions.

Литература

1. Kublbeck J., Bohm M., and Denner A. FeynArts: computer algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes. – Comp. Phys. Commun. – 1990. – Vol.60. – P.165-190.

2. Hahn T., Perez-Victoria M. Automatized One-Loop Calculations in 4 and D dimensions, Comput. Phys. Commun., V. 118, 1999. – 153-165 с.

3. Андреев В.В. Вычисление амплитуд рассеяния в квантовополевых теориях и моделях, Гомель, 2004. – 235 с.

4. Andreev V.V., Nucl. Instr.&Methods in Phys. Research A502 N. 2-3, 607 (2003).

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.06