Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5 (44), 2007

УДК 517.9

Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова-Фоккера-Планка для неавтономных квазилинейных систем с одной степенью свободы при действии белого шума, проходящего через линейный фильтр

С. П. Жогаль, С. И. Жогаль, Т. А. Майсейкова, И. В. Сафонов

Пусть исходная система описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x}+\omega_0^2=\varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega_0 t)x^s+\varepsilon\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega_0 t)\dot{x}^k+q(t), \tag{1}$$

$$K_q(\tau)=\sigma_0^2e^{-\alpha|\tau|},\quad S_q(\omega)=\frac{\sigma_0^2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}, \tag{2}$$

где $\alpha = const>0$.

Рассмотрим процедуру замены экспоненциально–коррелированного случайного процесса *q(t)* белым шумом. Для этого процесса составим формирующий линейный фильтр:

$$Lq(t)=\dot{q}+\alpha q=\sqrt{\varepsilon}m\sqrt{2\alpha}\dot{\xi}(t), \tag{3}$$

где параметр корреляции α удовлетворяет условию $\alpha<<\varepsilon$, а $\dot{\xi}(t)$ – белый шум с интенсивностью. Характеристическое уравнение фильтра (3) имеет один действительный отрицательный корень $\lambda_1=-\alpha$. При таких условиях задачи, согласно [1], действие экспоненциально–коррелированного процесса *q(t)* на механическую систему с одной степенью свободы (1) можно приближенно заменить белым шумом с интенсивностью

$$\sqrt{2\pi S_q(\omega_0)}=\sigma_0\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}}=\sqrt{\varepsilon}h\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}}.$$

Таким образом, вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентное уравнение

$$\ddot{x}+\omega_0^2=\varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega_0 t)x^s+\varepsilon\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega_0 t)\dot{x}^k+\sqrt{\varepsilon}h\sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}}\dot{\xi}(t)\,, \tag{4}$$

исследование которого сводится к исследованию системы, подверженной белому шуму.

Теорема. *Пусть для системы (4) выполняются следующие условия*

1. $\dfrac{\partial}{\partial a}\left\{a\underset{t}{M}\left[h(a\cos\psi,-a\sin\psi)\cos\psi\right]\right\}=0$

2. $\Omega_s\neq s-(2n-1),\quad n=1,2,...,\left[\dfrac{s}{2}\right]$, *где* $\left[\dfrac{s}{2}\right]$ *– целая часть числа* $\dfrac{s}{2}$.

Тогда соответствующее уравнение КФП будет удовлетворять условию потенциальности и, следовательно, решение $W(a,\theta)$ *соответствующего уравнения КФП может быть найдено в квадратурах.*

Доказательство. Обозначим $\sigma = h\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}}$. Для усредненного уравнения КФП, согласно [2], имеем

$$
\begin{aligned}
K_1(a,\theta) &= \underset{t}{M}[-\frac{1}{\omega}\{h(a\cos\psi,-a\sin\psi)+\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi + \\
&+\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_s\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\}\sin\psi+\frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\cos^2\psi], \\
K_2(a,\theta) &= \underset{t}{M}[-\frac{1}{a\omega}\{h(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)+\sum_{s=0}^{S}P_s\cos(\Omega_s\omega t)a^s\cos^s\psi + \\
&+\sum_{k=1}^{K}R_k\cos(\zeta_k\omega t)a^k(-\omega)^k\sin^k\psi\}\cos\psi+\frac{\sigma^2}{2a\omega^2}\sin 2\psi, \\
K_{11}(a,\theta) &= \underset{t}{M}\left[\frac{1}{\omega^2}\sigma^2\sin^2\psi\right]=\frac{\sigma^2}{2\omega^2},\quad K_{12}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left[\frac{1}{2a\omega^2}\sigma^2\sin 2\psi\right]=0, \\
K_{22}(a,\theta) &= \underset{t}{M}\left[\frac{1}{a^2\omega^2}\sigma^2\cos^2\psi\right]=\frac{\sigma^2}{2\omega^2a^2}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Тогда условие потенциальности для системы (4) будет выполнятся, если найдутся такие $\Omega_s, s=0,1,...S$, и $\zeta_k, k=1,2,...K$, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta}[\sum_{s=0}^{S}P_s a^s\underset{t}{M}(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)) + \\
&+\sum_{k=1}^{K}R_k a^k(-\omega)^k\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\psi\cos(\zeta_k\omega t))] = \\
&=\frac{\partial}{\partial a}[\sum_{s=0}^{S}P_s a^{s+1}\underset{t}{M}(\cos^{s+1}\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)) + \\
&+\sum_{k=1}^{K}R_k a^{k+1}(-\omega)^k\underset{t}{M}(\cos\psi\sin^k\psi\psi\cos(\zeta_k\omega t))].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Исходя из уравнения (6), необходимо выяснить, при каких Ω_s и ζ_k будут справедливы следующие условия:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}\left(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t)\right)\right]=(s+1)\underset{t}{M}\left(\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t)\right), \\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}\left(\sin^{k+1}\psi\psi\cos(\zeta_{ks}\omega t)\right)\right]=(k+1)\underset{t}{M}\left(\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_s\omega t)\right) \\
(\forall s=\overline{0,S},\quad \forall k=\overline{1,K}).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Рассмотрим первое из соотношений (7). Пусть s – нечетно. Тогда, воспользовавшись известными формулами для представления $\sin^k\psi$, $\cos^s\psi$ через тригонометрические функции кратных аргументов, после проведения громоздких математических выкладок получаем

$$
\begin{aligned}
&\underset{t}{M}\left\{\cos^s\psi\sin\psi\cos\left(\Omega_s\omega t\right)\right\}=\frac{1}{2^{s+1}}\underset{t}{M}\{\sin((s+1)\psi-\Omega_s\omega t)+ \\
&+\left[\binom{s}{1}-\binom{s}{0}\right]\sin((s-1)\psi-\Omega_s\omega t)+\left[\binom{s}{2}-\binom{s}{1}\right]\sin((s-3)\psi-\Omega_s\omega t)+\ldots+\left[\binom{s}{\frac{s-1}{2}}-\binom{s}{\frac{s-3}{2}}\right]\times \\
&\times\sin(2\psi-\Omega_s\omega t)=\frac{1}{2^{s+1}}\underset{t}{M}\{\sin((s+1)\psi-\Omega_s\omega t)+\sum_{c=1}^{\frac{s-1}{2}}\left[\binom{s}{c}-\binom{s}{c-1}\right]\sin((s-2c-1)\psi-\Omega_s\omega t\},
\end{aligned}
$$

где $\binom{s}{n} = \dfrac{s!}{n!(s-n)!}$.

Тогда в резонансном случае при $\Omega_s = s-2n+1$, где $n-$ один из элементов множества $\{0,1,\ldots,\left[\frac{s}{2}\right]\}$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))\right] = \frac{1}{2^{s+1}}\cos((s-(2n-1))\theta)\times$$

$$\times\left\{(s-(2n-1))\left[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}\right]\right\}.$$

С другой стороны

$$\underset{t}{M}\left\{\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t)\right\} = \frac{1}{2^{s+1}}\underset{t}{M}\{\cos((s+1)\psi-\Omega_s\omega t)+$$

$$+\binom{s+1}{1}\cos((s-1)\psi-\Omega_s\omega t)+\binom{s+1}{2}\cos((s-3)\psi-\Omega_s\omega t)+\ldots+\binom{s+1}{\frac{s-1}{2}}\times$$

$$\times\cos(2\psi-\Omega_s\omega t) = \frac{1}{2^{s+1}}\cos((s-(2n-1))\theta)\binom{s+1}{n}.$$

После проведения аналогичных выкладок для первого из соотношений (7) при s – четном, а также для второго соотношения при условии наличия в системе резонансов вида $\zeta_k = k-2n+1,\ n = 0,1,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right]$ убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}(\cos^s\psi\sin\psi\cos(\Omega_s\omega t))\right] = \frac{1}{2^{s+1}}\left[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}\right]\cos((s-2n+1)\theta)\times$$

$$\times(s-2n+1),$$

$$\underset{t}{M}\left\{\cos^{s+1}\psi\cos(\Omega_s\omega t)\right\} = \frac{1}{2^{s+1}}\binom{s+1}{n}\cos((s-2n+1)\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\right] = \frac{(-1)^{\frac{k+3+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times$$

$$\times\sin((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),$$

$k-$ нечетное,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\underset{t}{M}(\sin^{k+1}\psi\cos(\zeta_k\omega t))\right] = \frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n}\times \tag{8}$$

$$\times\cos((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),$$

$k-$ четное,

$$\underset{t}{M}\left\{\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t)\right\} = \frac{(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}\right]\sin((k-2n+1)\theta),$$

$k-$ нечетное

$$\underset{t}{M}\left\{\cos\psi\sin^k\psi\cos(\zeta_k\omega t)\right\} = \frac{(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}\right]\cos((k-2n+1)\theta),$$

$k-$ четное.

Исходя из соотношений (8) несложно установить, что условия потенциальности (7) выполняются при любых резонансных соотношениях вида

$$\zeta_k = k - 2n + 1,\ n = 0,1,\ldots,[\tfrac{k}{2}], \forall k = 1,2,\ldots K$$

и лишь в одном резонансном случае для Ω_s:

$$\Omega_s = s + 1, \forall s = 0,1,\ldots S,$$

что соответствует утверждению теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы уравнение (4) будет допускать точное решение* $p(a,\varphi) = Cae^d$, *где*

$$d = -\frac{2\omega_0\left(\alpha^2 + \omega_0^2\right)}{m^2\alpha}\cdot\left[M^* + M^{**}\right] - \frac{\omega_0\left(\alpha^2 + \omega_0^2\right)}{m^2\alpha}\sum_{s=0}^{S}\frac{P_s a^{s+1}}{(s+1)2^{s-1}}\sin((s+1)\varphi) +$$

$$+\frac{\left(\alpha^2 + \omega_0^2\right)}{m^2\alpha}\sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ - íå÷åòí.}}}^{K}\frac{R_k a^{k+1}\omega_0^{k+1}(-1)^{\frac{k+2n-1}{2}}}{(k+1)2^{k-1}}\binom{k+1}{n}\cos((k-2n+1)\varphi) -$$

$$-\frac{\left(\alpha^2 + \omega_0^2\right)}{m^2\alpha}\sum_{\substack{k=1 \\ k\text{ - ÷åòí.}}}^{K}\frac{R_k a^{k+1}\omega_0^{k+1}(-1)^{\frac{k+2n}{2}}}{(k+1)2^{k-1}}\binom{k+1}{n}\sin((k-2n+1)\varphi),$$

$$M^* = \int M_t\left\{h\left(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi\right)\sin\psi\right\}da,$$

$$M^{**} = \int M_t\left\{ah\left(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi\right)\cos\psi\right\}d\varphi,\quad \psi = \omega_0 t + \varphi.$$

Abstract. The paper considers Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method to study random variations in the non-autonomous dynamic system subjected to white noise through the line filter. Consideration is given to close replacement of broadband accidental equivalent of white noise. The integration of average Kolmogorov-Fokker-Planck equations is also studied in the paper.

Литература

1. Митропольский, Ю. А. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю. А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань // Киев: Наук. Думка, 1992. – 344 с.

2. Жогаль, С. И. Исследование стохастических квазилинейных колебательных систем: Учебное пособие / С. И. Жогаль, С. П. Жогаль // Гомель: ГГУ, 1997. – 96 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 10.05.07