Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

Об абнормальных максимальных подгруппах конечных групп

Е. Н. Бородич, М. В. Селькин

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является классической задачей. Одной из задач этого направления является исследование свойств пересечений максимальных подгрупп и влияние этих свойств на строение группы. Эта задача рассматривалась в работах [1–4]. К данному направлению относится и настоящая работа.

Согласно [1] подгрупповым m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ её максимальных подгрупп и саму группу G. При этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого автоморфизма α группы G.

Напомним, что m-функтор Θ называется регулярным, если выполняются следующие условия:

1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Пусть Θ — некоторый m-функтор. Напомним, что Θ-подгруппой Фраттини называют пересечение Θ-подгрупп группы G, которое обозначают $\Phi_\theta(G)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Рассмотрим подгруппу $\Phi_{\theta_1}(G)$, где $\Theta_1 = \Theta_2 \cap \Theta$, Θ_2 — m-функтор, выделяющий все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы ($\mathfrak{F}$-абнормальный m-функтор [1]), а Θ — произвольный m-функтор группы G. Другими словами, $\Phi_{\theta_1}(G)$ есть пересечение тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, которые выделяет m-функтор Θ. Соответствующую данному m-функтору обобщенную подгруппу Фраттини будем обозначать $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. В случае, когда в группе G максимальных подгрупп, удовлетворяющих данным условиям, нет, положим $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G$.

В дальнейшем m-функтор Θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G множество $\Theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G.

В работе [4] был поставлен следующий вопрос: "Если H — субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?"М.В.Селькин решил эту задачу в общем виде: если $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация, H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$. В данной работе исследуется, для каких обобщенных подгрупп Фраттини выполняется аналогичная закономерность.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Phi_\theta(G))$ и $H/O_\pi(\Phi_\theta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме IV.4.3 [6] $\mathfrak{F}$ содержится в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi_\theta(G)$ - π-группа. Таким образом, H - π-группа и $H/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H - субнормальная подгруппа группы G и по лемме 1 из [5] $F_p(G/\Phi_\theta(G)) = F_p(G)/\Phi_\theta(G)$, то мы получаем, что $F_p(H/\Phi_\theta(G)) = F_p(H)/\Phi_\theta(G)$. Так как $H/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, то используя лемму 1 из [5] и лемму 4.5 из [2], получаем

$$(H/\Phi_\theta(G))/F_p(H/\Phi_\theta(G)) = H/\Phi_\theta(G)/F_p(H)/\Phi_\theta(G) \simeq H/F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа H входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ содержит формацию всех нильпотентных групп, $\pi = \mathbb{P}$, из теоремы 1 вытекает следующее: Если H – субнормальная подгруппа группы G такая, что $H/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, Θ — абнормально полный m-функтор, то $H \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\Theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех ненормальных максимальных подгрупп, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ и имеет место следующее

Следствие 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G))$ и $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Если m-функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы, то подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$, и из теоремы 1 получаем известный результат работы [3].

Замечание 1. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию всех нильпотентных групп, то из того, что $H/\Delta(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H, не следует $H \in \mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p$ – насыщенная формация всех p-групп, p — простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ циклическая группа порядка p^2q^2. Если $H = C_{p^2}\Delta(G)$, то $H \lhd G$ и $H/\Delta(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

Следствие 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, замкнутая относительно взятия субнормальных подгрупп, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G))$ и $H/O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме IV.3.16 [6] $f(p)$ замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп для каждого $p \in \pi$. Предположим, что утверждение не верно и группа G — контрпример минимального порядка. Не сложно показать, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N \subseteq O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G))$ и $H/N \in \mathfrak{F}$. Если $N \subseteq \Phi_\theta(G))$, то $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно найдется максимальная Θ-подгруппа M такая, что $G = MN$. Отсюда M — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная Θ-подгруппа группы G так как $N \subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Это означает, что $G/C_G(N) \in f(p)$ для каждого простого делителя p порядка N. Следовательно $H/C_H(N) \in f(p)$ для каждого простого делителя p порядка N и каждый главный фактор между H и N является $\mathfrak{F}$-центральным в H. Применяя теорему IV.3.5 [6] заключаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Следствие 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, замкнутая относительно взятия субнормальных подгрупп, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если субнормальная подгруппа H группы G такова, что $H/H \cap O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Замечание 2. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию всех нильпотентных групп и не замкнута относительно взятия субнормальных подгрупп, то из того, что $H/H \cap O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)) \in \mathfrak{F}$, не всегда следует $H \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $G \in \mathfrak{F}$ содержащую субнормальную подгруппу H такую, что $H \notin \mathfrak{F}$. Таким образом $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = G$ и $H/H \cap O_\pi(\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)) = H/H \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Пусть N — субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi_\theta(G)$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 — холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$, то $N/D \simeq N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi_\theta(G)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 1 из [5] и лемму 4.5 из [2], получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1 \simeq N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Если N — субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

В случае, когда $\Theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех ненормальных максимальных подгрупп, имеет место следующее

Следствие 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если N — субнормальная подгруппа группы G и $N/N\cap\Delta(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N — субнормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

В случае, когда m-функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы, из теоремы 2 получаем результат М.В.Селькина из монографии [1].

Abstract The author considers conditions under which a subnormal subgroup of a finite group belongs to a saturated formation.

Литература

1. М. В. Селькин, Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп, Минск, Беларуская навука, 1997.

2. Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

3. A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos, On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group. Glasgow Math. J., **36** (1994), 241–247.

4. J. C. Beidleman, H. Smith, On Frattini-like subgroups, Glasgow Math. J., **35** (1993), 95–98.

5. Р. В. Бородич, Пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных Θ-подгрупп в конечных группах, Гомель (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 36), 2002.

6. K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.06