Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

Относительно радикальные локальные формации конечных групп

А. Ф. Васильев, Д. Н. Симоненко

1. Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Изучение радикальных формаций (или, иначе, формаций Фиттинга) конечных групп, в настоящее время занимает одно из центральных мест в теории классов групп (см. [1–3]). Однако многие классические формации (например, формация всех сверхразрешимых групп, формация всех групп с нильпотентным коммутантом), не являются радикальными.

В 1957 году Р.Бэр в [4] установил, что группа сверхразрешима, если она является произведением своих сверхразрешимых нормальных подгрупп и имеет нильпотентный коммутант. Усиливая этот результат, в работе [5] было доказано, что группа сверхразрешима, если она представима в виде произведения своих нормальных сверхразрешимых подгрупп и является расширением нильпотентной группы с помощью группы с абелевыми силовскими подгруппами.

Эти результаты приводят к следующему определению

Определение 1.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется радикальной формацией в классе $\mathfrak{X}$, если:*

1) $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной формацией в классе $\mathfrak{X}$, т.е. если из $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$ всегда следует $N \in \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = MN$, где M и N — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Замечание. По определению, пустая формация радикальна в любом классе групп, и любая формация радикальна в пустом классе групп.

В связи с изучением формаций, радикальных в классе групп, возникают следующие две естественные общие задачи.

1. *Для данной (насыщенной) формации $\mathfrak{X}$ исследовать (насыщенные) формации $\mathfrak{F}$, которые являются радикальными в $\mathfrak{X}$.*

2. *Для данной системы (насыщенных) формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ исследовать (насыщенные) формации $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}_i$ является радикальной в $\mathfrak{X}$ для любого $i \in I$.*

Ранее данные задачи (в основном, первая) исследовались для случая, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех разрешимых групп или с классом всех групп. В этой связи отметим ставший классическим результат Р.Брайса и Д.Косси [6] 1972 года, дающий описание всех наследственных формаций, радикальных в классе всех разрешимых групп (другие результаты см. в [3]). В недавней работе [7] была доказана следующая

Теорема 1.2 [7]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная наследственная формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда всякая насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является радикальной в $\mathfrak{X}$.*

В связи с теоремой 1.2 возник вопрос о нахождении насыщенных наследственных формаций, содержащих в качестве собственной подформации формацию всех групп с нильпотентным коммутантом, для которых выполняется заключение теоремы 1.2. Ограничения на такие формации было установлено в следующей теореме, полученной в [7]. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает формацию всех групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 1.3 [7]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная наследственная формация. Пусть для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ выполняется утверждение: $\mathfrak{F}$ является радикальной в $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию относительно радикальных насыщенных формаций в отмеченных выше двух направлениях.

2. Основная часть. В работе используются обозначения и определения из монографий [1,3].

Напомним некоторые обозначения: $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп.

Для класса групп $\mathfrak{X}$ группа G называется минимальной не $\mathfrak{X}$-группой, если сама G не принадлежит $\mathfrak{X}$, а каждая ее собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{X}$. Группа G называется примитивной, если в ней найдется максимальная подгруппа с единичным ядром.

Следующая теорема позволяет редуцировать вопрос о радикальности данной локальной формации относительно другой локальной формации к рассмотрению аналогичного вопроса для значений их локальных экранов.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — локальные формации. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если f и x — локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно и $f(p)$ является радикальной формацией в $x(p)$ для каждого простого p, то $\mathfrak{F}$ является радикальной формацией в $\mathfrak{X}$;

2) пусть F и X — максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является радикальной формацией в $\mathfrak{X}$, когда $F(p)$ — радикальная формация в $X(p)$ для каждого простого p.

Для доказательства теоремы 2.1 потребуются следующие леммы.

Лемма 2.2. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — семейство радикальных формаций в классе $\mathfrak{X}$. Тогда формация $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ также радикальна в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство осуществляется проверкой соответствующих определений.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — формации, причем $\mathfrak{F}$ радикальна в $\mathfrak{X}$ и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F}$ — радикальная формация в $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{X}$ и $N \lhd G$. Тогда $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$. Из радикальности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ следует, что $NO_\pi(G)/O_\pi(G) \simeq N/(N \cap O_\pi(G)) \in \mathfrak{F}$. Откуда $N \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F}$.

Проверим условие 2) определения 1.1. Пусть $G = HK$ — $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{X}$-группа такая, что H и K — нормальные $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F}$-подгруппы в G. Так как $H \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F}$, то $H/O_\pi(H) \in \mathfrak{F}$. Из $H \lhd G$ следует, что $O_\pi(H) \lhd G$. Аналогично, $O_\pi(K) \lhd G$. Следовательно, $O_\pi(H)O_\pi(K) \subseteq O_\pi(G)$. Из $G \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{X}$ следует, что $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{X}$. Заметим, что $G/O_\pi(G)$ является произведением своих нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп $HO_\pi(G)/O_\pi(G)$ и $KO_\pi(G)/O_\pi(G)$. Из радикальности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ получаем, что $G/O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, а значит, $G \in \mathfrak{E}_\pi\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Установим справедливость утверждения 1). Пусть f и x — локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ такие, что $f(p)$ является радикальной формацией в $x(p)$ для каждого простого p. Пусть $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{X})$. Ввиду леммы 4.5 из [1] имеем $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p f(p)$ и $\mathfrak{X} = \bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p x(p)$.

По условию формация $f(p)$ радикальна в $x(p)$ для любого простого p. Тогда по лемме 2.3 формация $\mathfrak{E}_p f(p)$ радикальна в $\mathfrak{E}_p x(p)$. Снова применяя лемму 2.3, получаем, что формация $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p f(p)$ радикальна в $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p x(p)$ для любого простого p.

Теперь по лемме 2.2 формация $\mathfrak{F}$ радикальна в $\mathfrak{X}$. Утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем 2). Пусть $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{X})$ и F и X — максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно. Ввиду теоремы 3.3 и леммы 4.5

из [1], $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi_1} \mathfrak{E}_{p'}F(p)$ и $\mathfrak{X} = \bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}X(p)$. По лемме 2.3 формация $\mathfrak{E}_{p'}F(p)$ радикальна в $\mathfrak{E}_{p'}X(p)$ для любого простого p. Теперь, применяя лемму 2.2, получаем, что формация $\mathfrak{F}$ радикальна $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная формация в $\mathfrak{X}$, F и X — максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно. Пусть G — группа минимального порядка такая, что $G = HK \in X(p)$, где H и K — нормальные $F(p)$-подгруппы в G, но $G \notin F(p)$.

Так как $F(p)$ и $X(p)$ — формации, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p)$ и $G \notin F(p)$, то в силу выбора группы G получаем $O_p(G) = 1$. Тогда по теореме 10.6 [3, стр. 176] существует точный неприводимый G-модуль U над полем из p элементов F_p. В этом случае $G^* = [U]G$, где U — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G^*, и $U = C_{G^*}(U) = F(G^*)$. Заметим, что $F_p(G^*) = U$. Так как $G^*/U \simeq G \in \mathfrak{X}$ и $G^*/F_p(G^*) = G^*/U \simeq G \in X(p)$, т. е. U — X-центральный фактор, то $G^* \in \mathfrak{X}$. Группа $G^* = H^*K^*$, где $H^* = UH$, $K^* = UK$, при этом H^* и K^* — её нормальные подгруппы. Так как $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p)$, $H \in F(p)$, $K \in F(p)$ и U — p-группа, то $H^* \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $K^* \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — радикальная формация, то $G^* \in \mathfrak{F}$. Но тогда по лемме 4.5 из [1] $G^*/F_p(G^*) = G^*/U \simeq G \in F(p)$. Противоречие.

Значит, $F(p)$ — радикальная формация в $X(p)$ для всякого простого p. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2.1 расширяет соответствующий результат Л.М.Слеповой из [8], полученный в случае, когда формация $\mathfrak{X}$ совпадает с формацией всех групп.

Теорема 2.1 является полезной для нахождения приложений для конкретных локальных формаций. Приведем некоторые из них.

Напомним, что согласно [3], ранговой функцией называется отображение $R : p \to R(p)$, которое каждому простому числу p ставит в соответствие некоторое множество натуральных чисел $R(p)$. Для этой функции в [3] определяется класс групп

$$\mathfrak{F}(R) = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{ для всех простых } p \in \pi(G) \text{ каждый главный } p\text{-фактор из } G \text{ имеет ранг, принадлежащий } R(p)),$$

который является формацией.

В случае, когда $\mathfrak{F}(R)$ является насыщенной формацией, ранговая функция называется насыщенной (см. [3], стр. 484). Говорят, что ранговая функция R имеет полную характеристику, если $R(p) \neq \varnothing$ для всех простых p.

Если задана ранговая функция R, то согласно [3] для каждого простого числа p определяются

$$\pi(p) = R(p) \cap \mathbb{P} \text{ и}$$

$$e(p) = \{p^m - 1 | m \in R(p)\}.$$

Через $\mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))$ обозначается класс всех абелевых $\pi(p)'$-групп с экспонентой, делящей $e(p)$, который является формацией.

Согласно [3] выполняется следующая

Лемма 2.4 [3]. *Пусть R — насыщенная ранговая функция полной характеристики. Тогда R удовлетворяет следующим условиям:*

RF1: *Если $n \in R(p)$ и $m \mid n$, то $m \in R(p)$;*

RF2: *Если $\{m, n\} \subseteq R(p)$, то $mn \in R(p)$;*

RF3: *Если p и q — различные простые числа, $q \in R(p)$ и $m \in R(q)$, то $q^m - 1 \in R(p)$;*

RF4: *Если простые числа p и q и натуральное число r удовлетворяют условиям*

(i) $p \mid (q^m - 1)$ для некоторого $m \in R(q)$,
(ii) $q \mid (p^n - 1)$ для некоторого $n \in R(p)$,
(iii) $r \mid (p^k - 1)$ для некоторого $k \in R(p)$,
(iv) $p \in R(p)$, $r \in R(q)$,
тогда $r \in R(p)$.

Локальный экран формации $\mathfrak{F}(R)$ в случае, когда R — насыщенная ранговая функция, описан в теореме 2.18 [3, стр. 490], которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.5 [3]. *Пусть R — ранговая функция, и $\hat{\mathfrak{F}}(R)$ — локальная формация, определенная локальным экраном f таким, что $f(p) = \mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))\mathfrak{S}_{\pi(p)}$ для каждого простого p. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) R является насыщенной ранговой функцией;

(b) R удовлетворяет условиям **RF1–RF4***;*

(c) $\hat{\mathfrak{F}}(R) = \mathfrak{F}(R)$.

Для доказательства следующего основного результата нам потребуются ряд лемм.

Лемма 2.6. *Формация $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ является наследственной насыщенной формацией, имеющей постоянный локальный экран f такой, что $f(p) = \mathcal{A}$.*

Доказательство осуществляется проверкой соответствующих определений.

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, состоящая из абелевых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ — радикальная формация в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$-группа $G = HK$ такая, что H и K — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в G. Индукцией по порядку группы G покажем, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Для G/N все условия теоремы выполняются. По индукции $G/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — формации, то можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $|N| = p^\alpha$, где p — простое число.

Так как H и K — абелевы нормальные подгрупы в G, то $G = HK$ является нильпотентной группой. Так как в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, то G — p-группа. Из $G \in \mathcal{A}$ следует, что G абелева, более того, она является циклической.

Поскольку $G = HK$, то либо $G = H$, либо $G = K$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$ и $\mathfrak{X}$ — нормально наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ радикальна в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ радикальна в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$-группа $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$-подгруппы в G.

Обозначим $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Так как $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, то $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Так как $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi' = \varnothing$ и $H \lhd G$, то $H^{\mathfrak{H}} = H_\pi$ — π-холлова подгруппа в H, причем $H_\pi \lhd G$. Аналогично, $K^{\mathfrak{H}} = K_\pi$ — π-холлова подгруппа в K и $K_\pi \lhd G$. Тогда $G_\pi = H_\pi K_\pi$ — π-холлова подгруппа в G и $G_\pi \lhd G$. Так как $\mathfrak{X}$ — нормально наследственная формация, то $G_\pi \in \mathfrak{X}$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Теорема 2.9. *Пусть R — насыщенная ранговая функция, тогда $\mathfrak{F}(R)$ — радикальная формация в $\mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть R — насыщенная ранговая функция. Тогда согласно лемме 2.5 формация $\mathfrak{F}(R)$ имеет внутренний локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))\mathfrak{S}_{\pi(p)}$ для любого простого p. Поскольку $\pi(\mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))) \cap \pi(p) = \varnothing$, то применяя последовательно леммы 2.7 и 2.8 получаем, что $f(p)$ является радикальной формацией в $\mathcal{A}$ для любого простого p. Но тогда по лемме 2.3 для любого простого p значение максимального экрана $\mathfrak{N}_p f(p)$ формации $\mathfrak{F}(R)$ является радикальной формацией в $\mathfrak{N}_p\mathcal{A}$. Согласно лемме 2.6 формация $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ имеет максимальный локальный внутренний экран F такой, что $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathcal{A}$ для каждого простого p. Но тогда по 2) теоремы 2.1 получаем, что $\mathfrak{F}(R)$ — радикальная формация в $\mathfrak{N}\mathcal{A}$. Теорема доказана.

В связи с отмеченными выше результатами возникает задача нахождения для данной локальной формации $\mathfrak{F}$ наибольшего класса (локальной формации, класса Шунка) $\mathfrak{X}$, для которого $\mathfrak{F}$ является радикальной.

Если p — простое число, то через $\mathcal{A}_{p-1}$ будем обозначать класс всех групп, у которых силовская q-подгруппа является абелевой для каждого простого числа q, делящего $p-1$. Пусть $\mathfrak{B}$ — локальная формация, имеющая локальный экран f такой, что $f(p) = \mathcal{A}_{p-1}$ для каждого простого p.

Отметим следующий результат.

Теорема 2.10. *Формация всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ является радикальной в $\mathfrak{B}$.*

Для доказательства теоремы потребуется следующая

Лемма 2.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащаяся в $\mathfrak{A}_{p-1}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является радикальной фомацией в $\mathcal{A}_{p-1}$.*

Доказательство с небольшими изменениями проводится аналогично лемме 2.7.

Доказательство теоремы 2.10. Как известно, формация всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$ имеет внутренний локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}_{p-1}$ для каждого простого p. Согласно лемме 2.11 фомация $\mathfrak{A}_{p-1}$ является радикальной в $\mathcal{A}_{p-1}$. Но тогда по 1) теоремы 2.1 фомация $\mathfrak{U}$ является радикальной в $\mathfrak{B}$. Теорема доказана.

Неизвестно, является ли формация $\mathfrak{B}$ наибольшей (по включению) среди всех локальных наследственных формаций, в которых $\mathfrak{U}$ радикальна. В связи с этим вопросом интересна следующая теорема.

Теорема 2.12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является радикальной в $\mathfrak{X}$;

2) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Нам потребуются следующие известные результаты.

Лемма 2.13 [4]. *Пусть G — примитивная группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу N. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если N абелева, то $N = F(G) = C_G(N)$;

2) если N неабелева, то $F(G) = 1$.

Доказательство следует из теорем 15.2 и 15.6 [4, стр. 53–54].

Лемма 2.14 [7]. *Всякая минимальная не $\mathcal{A}$-группа является примарной минимальной неабелевой группой.*

Лемма 2.15 [7]. *Пусть G — группа с единственной минимальной нормальной подгруппой N, которая неабелева. Если p — простое число, делящее $|N|$, то существует точный F_pG-модуль A и соответствующее фратиниевое расширение $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$.*

Доказательство лемм 2.14 и 2.15 можно найти в [7].

Доказательство теоремы 2.12. Предположим, что множество $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathcal{A}$ не пусто и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Так как $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, то G является минимальной не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-группой. Поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ — насыщенные формации, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{N}\mathcal{A}}$ и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть N — абелева p-группа, где p — некоторое простое число. Так как $\Phi(G) = 1$, то найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$.

Заметим, что $N \cap M \lhd G$. Тогда из единственности N следует, что $N \cap M = 1$, а значит, $M_G = 1$. Следовательно, G — примитивная группа. Тогда $N = C_G(N) = F(G)$ по 1) леммы 2.13. Так как $G \notin \mathfrak{N}\mathcal{A}$, то $G/N \simeq M$ не принадлежит $\mathcal{A}$.

Пусть C — максимальная подгруппа из M. Обозначим $R = NC$. Ввиду выбора G получаем, что $R \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Согласно лемме 2.6 формация $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathcal{A}$ для любого простого p. Но тогда по лемме 4.5 из [1] получаем, что $R/F_p(R) \in f(p) = \mathcal{A}$.

Заметим, что $O_{p'}(R) \subseteq C_R(N) = N$. Отсюда $O_{p'}(R) = 1$. Следовательно, $F_p(R)$ — p-группа. Тогда $R/F_p(R) = CN/F_p(R) = CF_p(R)/F_p(R) \simeq C/C \cap F_p(R) \in \mathcal{A}$.

С другой стороны, из $M \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$ следует, что $M/F(M) \in \mathcal{A}$. Тогда по лемме 3.9 из [1] $F(M)$ — p'-группа. Так как $\mathcal{A}$ — наследственная формация, то $CF(M)/F(M) \in \mathcal{A}$. Таким образом, $C/C \cap F(M) \in \mathcal{A}$ и $C/C \cap F_p(R) \in \mathcal{A}$.

Поскольку $F_p(R)$ — p-группа, $F(M)$ — p'-группа и $\mathcal{A}$ — формация, то $C/C \cap F_p(R) \cap F(M) \simeq C \in \mathcal{A}$. Учитывая наследственность формации $\mathcal{A}$, получаем, что M является минимальной не $\mathcal{A}$-группой. По лемме 2.14 имеем, что M — минимальная неабелева q-группа для некоторого простого q. Поэтому в M найдутся две максимальные подгруппы M_1 и M_2. Так как M — нильпотентная группа, то $M_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Из того, что M — минимальная не $\mathcal{A}$-группа, следует, что $M_i \in \mathcal{A}$ для $i = 1, 2$. В этом случае $T_1 = NM_1$ и $T_2 = NM_2$ — нормальные $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-подгруппы группы G и $T_1T_2 = G$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то ввиду условия теоремы получаем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Получили противоречие с выбором группы G. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Случай 2. Пусть N — неабелева группа. Тогда N представима в виде прямого произведения изоморфных простых неабелевых групп. Из 2) леммы 2.13 имеем, что $F(G) = 1$. Поскольку $G \notin \mathcal{A}$, то найдется минимальная не $\mathcal{A}$-подгруппа H группы G, которая, как нетрудно видеть, примарна. Так как N неразрешима, то $|\pi(N)| \geq 3$ и найдется $p \in \pi(N)$ такое, что $p \notin \pi(H)$. Тогда по лемме 2.15 существует точный F_pG-модуль A и групповое расширение $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$ такое, что в E имеется нормальная p-подгруппа K такая, что K G-изоморфна A, $K \subseteq \Phi(E)$ и $E/K \simeq G$.

Поскольку $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то $E \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим H^* — прообраз подгруппы H при естественном гомоморфизме $\alpha : E \to E/K \simeq G$. Так как $H^*/K \simeq H$ и K — p-группа, где $p \notin \pi(H)$, то K — нормальная силовская p-подгруппа в H^*. По теореме Шура—Цассенхауза в H^* найдется подгруппа T такая, что $H^* = KT$ и $(|H^* : K|, |H^* : T|) = 1$. Заметим, что $T \simeq H$ и $K \subseteq F(H^*)$. Если $K \subset F(H^*)$, то $F(H^*) = F(H^*) \cap H^* = F(H^*) \cap KT = K(F(H^*) \cap T)$ и $F(H^*) \cap T \neq 1$. Пусть $q \in \pi(F(H^*) \cap T)$. Ясно, что $q \neq p$. Тогда для силовской q-подгруппы Q из $F(H^*)$ выполняется $Q \subseteq C_{F(H^*)}(K) \subseteq C_{H^*}(K) = 1$. (Так как K G-изоморфна A и A — точный KG-модуль, то $C_G(A) = 1$.) Получили противоречие. Следовательно, $F(H^*) = K$ и $H^*/F(H^*) = H^*/K \simeq T \notin \mathcal{A}$. Поэтому $H^* \notin \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Но, с другой стороны, $E \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственная формация. Поэтому $H^* \in \mathfrak{X}$. Очевидно, что H^* разрешима. Поэтому $H^* \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Но выше было доказано, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Поэтому $H^* \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathcal{A}$. Покажем, что формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является радикальной в $\mathfrak{X}$. Для этого, согласно определению 1.1, достаточно показать, что $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является радикальной формацией в $\mathfrak{N}\mathcal{A}$. Согласно лемме 2.7 формация $\mathfrak{A}$ радикальна в $\mathcal{A}$. Но тогда по лемме 2.3 формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ является радикальной в $\mathfrak{N}_p\mathcal{A}$. Согласно [1] формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ имеют максимальные внутренние локальные экраны F_1 и F_2, соответственно, такие, что $F_1(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ и $F_2(p) = \mathfrak{N}_p\mathcal{A}$ для любого простого p. Отсюда по 2) теоремы 2.1

формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ радикальна в $\mathfrak{N}\mathcal{A}$. Теорема доказана.

3. Заключительные выводы, открытые вопросы. Пусть $\mathfrak{F}$ — радикальная формация в классе $\mathfrak{X}$. Тогда в любой $\mathfrak{X}$-группе G существует $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в G. В связи с этим замечанием отметим следующие следствия из полученных выше результатов.

1. Если R — насыщенная ранговая функция, то любая группа, являющаяся расширением нильпотентной группы с помощью $\mathcal{A}$-группы обладает $\mathfrak{F}(R)$-радикалом.

Рассматривая различные насыщенные ранговые функции, можно получать радикальные в $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ формации. В частности, если $R(p) = \{1\}$ для любого простого p, то $\mathfrak{F}(R)$ — формация всех сверхразрешимых групп. Также является насыщенной следующая ранговая функция: $R(p) = \{1\}$, если $p = 2$, и $R(p) = \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, если $p \neq 2$. Другие примеры насыщенных ранговых функций можно найти, например, в [3].

2. Если $\mathfrak{B}$ — формация, определенная локальным экраном f таким, что $f(p) = \mathcal{A}_{p-1}$ для каждого простого p, то любая $\mathfrak{B}$-группа имеет сверхразрешимый радикал.

Отметим также два открытых вопроса, связанных с нашими исследованиями.

Вопрос 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Существует ли среди наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{F}$ радикальна в $\mathfrak{X}$, наибольшая (по включению) формация?

Вопрос 2. Является ли формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ всех групп с нильпотентным коммутантом наибольшей (по включению) наследственной насыщенной формацией, для которой любая насыщенная (наследственная) формация является радикальной в ней?

Abstract. A formation $\mathfrak{F}$ is called radical in $\mathfrak{X}$ if: 1) $\mathfrak{F}$ is an S_n-closed formation in $\mathfrak{X}$; 2) if $G = HK$ is an $\mathfrak{X}$-group, where $H, K \lhd G$ and $H, K \in \mathfrak{F}$ then $G \in \mathfrak{F}$.

In this paper saturated formations $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{F}$ is radical in $\mathfrak{X}$, are studied.

Литература

1. Л.А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

2. Л.А. Шеметков, Композиционные формации и радикалы конечных групп, Укр. мат. ж. **40**, № 3 (1988), 369–374.

3. K. Doerk, T.O. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin-New York, Walter De Gruyter, 1992.

4. R. Baer, Classes of finite groups and their properties, Illinois J. Math., **1**. (1957), 115-187.

5. А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами, Известия вузов. Математика, **426**, № 11 (1997), 10-14.

6. R.A. Bryce, J. Cossey, Fitting formations of finite soluble groups, Math. Z., 127 (1972), 217–223.

7. Д.Н. Симоненко, О произведениях нормальных подгрупп конечных групп, Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины, Вопросы алгебры, 6 (27) (2004), 71–75.

8. Л.М. Слепова, О радикальных формациях, Матем. заметки, **21**, № 6 (1977) 861–864.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.06