Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

Конечные группы с $\mathfrak{F}$-достижимыми проекторами

Т. И. Васильева, А. И. Прокопенко

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором группы G, если H^φ является максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой в G^φ для любого эпиморфизма φ группы G [1]. Если H является $\mathfrak{X}$-проектором в любой ее содержащей подгруппе группы G, то H называется $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой [2]. Примерами $\mathfrak{X}$-проекторов являются картеровы подгруппы разрешимых групп, π-холловы подгруппы разрешимых групп, силовские подгруппы конечных групп, когда, соответственно $\mathfrak{X}$ — класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, класс всех разрешимых π-групп $\mathfrak{S}_\pi$, класс всех p-групп $\mathfrak{N}_p$. В 1963 году Гашюц [3] для насыщенной формации $\mathfrak{X}$, в 1967 году Шунк [4] для класса Шунка $\mathfrak{X}$ доказали существование и сопряженность $\mathfrak{X}$-покрывающих подгрупп ($\mathfrak{X}$-проекторов) в разрешимых группах. В 1979 году Эриксон [5] установил для класса Шунка $\mathfrak{X}$ существование $\mathfrak{X}$-проекторов (сопряженность которых не всегда имеет место) в любой конечной группе. Отметим, что для класса Шунка $\mathfrak{X}$ множество $\mathfrak{X}$-проекторов совпадает с множеством $\mathfrak{X}$-покрывающих подгрупп в любой разрешимой группе [1]. Возникает вопрос: как вложение $\mathfrak{X}$-проекторов в группу связано с ее свойствами? В настоящей работе исследуются группы, в которых $\mathfrak{X}$-проекторы являются $\mathfrak{F}$-достижимыми подгруппами для некоторого класса групп $\mathfrak{F}$. Получены свойства классов, состоящих из таких групп.

2. Основная часть. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-достижимой [6], если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной [6, 7], если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Используя лемму 3.1.1. из [6] и лемму 1 из [8] запишем известные свойства $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.

Лемма 2.1 [6, 8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа из G и $G^\mathfrak{F} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;

3) если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;

4) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K и K — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

5) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа в G, то H^x — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G для любого $x \in G$.

Из леммы 1.2.14 [6] получается

Лемма 2.2 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой гомоморф, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то HN/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N;

2) если $N \subseteq H$ и H/N — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N, то H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

Из леммы 1.2.12 [6] получается

Лемма 2.3 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой гомоморф, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то HN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N;

2) если $N \subseteq H$ и H/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Лемма 2.4 [5]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если E — $\mathfrak{X}$-проектор группы G и $N \lhd G$, то EN/N — $\mathfrak{X}$-проектор факторгруппы G/N;

2) если W — подгруппа из G, $N \lhd G$, $N \subseteq W$ и W/N — $\mathfrak{X}$-проектор факторгруппы G/N, то каждый $\mathfrak{X}$-проектор из W является $\mathfrak{X}$-проектором группы G.

Введем следующее

Определение 2.5. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые классы групп. Определим классы групп $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$ следующим образом:

$\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}} = (G|$ всякий $\mathfrak{X}$-проектор группы G является ее $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппой),

$\mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}} = (G|$ всякий $\mathfrak{X}$-проектор группы G является ее $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой).

Легко заметить, что если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые классы групп, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$. Также для непустого класса групп $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ очевидны следующие включения $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}_1}} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{F}_1}} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$.

Напомним, что класс Шунка — это непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, для которого из условия $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M из G всегда следует $G \in \mathfrak{X}$.

Лемма 2.6. *Если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $\mathfrak{F}$ — непустой наследственный гомоморф, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Возьмем любую группу $G \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим произвольный $\mathfrak{X}$-проектор H группы G. Если $H = G$, то $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$. Пусть $H \neq G$. Рассмотрим максимальную цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_n = G$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственный класс, то $H_{i-1} \in \mathfrak{F}$, $i = 1, ..., n$. Из того, что $\mathfrak{F}$ — гомоморф, следует $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$, $i = 1, ..., n$. Это означает, что H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $G \in \mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Отметим, что в общем случае $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}} \not\subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}} \not\subseteq \mathfrak{F}$.

Пример 2.7. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, $G = S_4$ — симметрическая группа степени 4, H — силовская 2-подгруппа группы G. Так как $|H| = 2^3$, $H = N_G(H)$, то H является картеровой подгруппой группы G, а значит, ее $\mathfrak{N}$-проектором. Рассмотрим цепь $H \subset G$. Четверная группа Клейна $V_4 = Core_G(H)$ и $G/Core_G(H) \in \mathfrak{U}$. Это означает, что H — $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа группы G. Из сопряженности $\mathfrak{N}$-проекторов в группе G и утверждения 5) леммы 2.1 получаем, что $G \in \mathfrak{N}_{sn_\mathfrak{U}}$, но $G \notin \mathfrak{N}$. Значит, $\mathfrak{N}_{sn_\mathfrak{U}} \not\subseteq \mathfrak{N}$, а следовательно, $\mathfrak{N}_{rn_\mathfrak{U}} \not\subseteq \mathfrak{N}$.

Пример 2.8. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, $G = S_3$ — симметрическая группа степени 3, H — силовская 3-подгруппа группы G. Тогда H является $\mathfrak{X}$-проектором в G, причем $H \lhd G$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}} \not\subseteq \mathfrak{F}$.

Лемма 2.9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $\mathfrak{F}$ — непустой наследственный гомоморф. Тогда и только тогда $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{X}$, то из леммы 2.6 получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{X}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Как было отмечено выше, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$. Рассмотрим любой $\mathfrak{X}$-проектор H группы G. Если $H \neq G$, то найдется максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, ..., n$. Для $i = n$ имеем $G/Core_G(H_{n-1}) \in \mathfrak{F}$. Так как $HCore_G(H_{n-1})/Core_G(H_{n-1})$ — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в $G/Core_G(H_{n-1})$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $H_{n-1} \supseteq HCore_G(H_{n-1}) = G \neq H_{n-1}$. Получили противоречие. Значит, $G = H \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} \in \mathfrak{X}$. Итак, $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *Если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Возьмем любой $\mathfrak{X}$-проектор H группы $G \in \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S}$. Для $H = G$ имеем $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}}$. Пусть $H \neq G$. Тогда существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, ..., n$ либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{N}$. Если выполняется $H_{i-1} \triangleleft H_i$ для всех $i = 1, ..., n$, то H является субнормальной подгруппой группы G. Предположим, что существует i такое, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{N}$. Тогда для такого i имеем $H_{i-1}/Core_{H_i}(H_{i-1}) \triangleleft\triangleleft H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ и следовательно, $H_{i-1} \triangleleft\triangleleft H_i$. Значит, H является субнормальной подгруппой группы G, а следовательно, $\mathfrak{X}$-достижимой подгруппой и $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S}$.

Покажем обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S}$. Если $G \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S}$. Пусть $G \notin \mathfrak{X}$. Тогда для любого $\mathfrak{X}$-проектора H группы G существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим i, для которого $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$. Так как G разрешима, то H является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой в G. Поэтому $H_{i-1} \supseteq HCore_G(H_{i-1}) = H_i \supseteq H_{i-1}$, то есть $H_{i-1} = H_i$. Это означает, что $H_{i-1} \triangleleft H_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому H — $\mathfrak{N}$-достижимая подгруппа группы G и $G \in \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S}$. Итак, $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{N}}} \cap \mathfrak{S}$. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка. Тогда и только тогда $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$, то из того, что во всякой нильпотентной группе G ее любой $\mathfrak{X}$-проектор является субнормальной, а следовательно, $\mathfrak{X}$-достижимой подгруппой, получаем, что $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$.

Пусть теперь $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S}$, то докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S}$, но $G \notin \mathfrak{X}$. Рассмотрим любой $\mathfrak{X}$-проектор H группы G. Так как $H \neq G$, то найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим i, для которого $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{X}$. Из разрешимости G следует, что H является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой в G. Поэтому $H_{i-1} \supseteq HCore_G(H_{i-1}) = H_i \supseteq H_{i-1}$. Значит, $H_{i-1} = H_i$. Откуда H — субнормальная подгруппа группы G. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ получаем, что $H = N_G(H)$. Поэтому $H = G$. Противоречие с выбором G. Итак, $G \in \mathfrak{X}$. Поэтому $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{X}}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Лемма доказана.

Лемма 2.12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $\mathfrak{F}$ — непустой наследственный гомоморф, содержащий $\mathfrak{N}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Возьмем группу $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Если $G \notin \mathfrak{X}$, то $G \neq H$ для любого ее $\mathfrak{X}$-проектора H. Поэтому существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$. Из того, что $\mathfrak{F}$ — наследственный гомоморф, получаем $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Но тогда H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Отсюда получаем, что $G \in \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Противоречие.

Итак, $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ и леммы 2.11 получаем, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Лемма доказана.

Через $N(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех групп, в которых любой $\mathfrak{X}$-проектор является нормальной подгруппой [1].

Лемма 2.13. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка. Тогда и только тогда $N(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$, когда любой $\mathfrak{X}$-проектор группы $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$ является пронормальной подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть любой $\mathfrak{X}$-проектор группы $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$ является пронормальной подгруппой. Очевидно, что $N(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$. Используя рассуждения из леммы 2.10, получаем, что любой $\mathfrak{X}$-проектор H группы $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$ является субнормальной подгруппой группы G. Из пронормальности H в G по лемме 17.5 из [7] заключаем, что $H \lhd G$. Следовательно, $G \in N(\mathfrak{X})$. Таким образом, $N(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$.

При $N(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}}$ обратное утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Теорема 2.14. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые гомоморфы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$ — гомоморфы;

2) если $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$ — формации.

Доказательство. Пусть N — произвольная нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$. Возьмем любой $\mathfrak{X}$-проектор R/N группы G/N. В R существует $\mathfrak{X}$-проектор H. По лемме 2.4 H является $\mathfrak{X}$-проектором в G, а HN/N — $\mathfrak{X}$-проектором в G/N. Так как HN/N — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в G/N и $HN/N \subseteq R/N \in \mathfrak{X}$, то $HN/N = R/N$. Из $G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ следует, что H — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. По лемме 2.2 $HN/N = R/N$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$.

Покажем, что класс $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ R_0-замкнут индукцией по порядку группы G. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что существуют нормальные в G подгруппы N_1 и N_2 такие, что $G/N_i \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$, $i = 1, 2$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$.

Пусть $N_1 \cap N_2 \neq 1$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу N, содержащуюся в $N_1 \cap N_2$. Тогда $G/N/N_i/N \simeq G/N_i \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$, $i = 1, 2$. Так как $|G/N| < |G|$, то $G/N/(N_1/N \cap N_2/N) = G/N/(N_1 \cap N_2)/N \simeq G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$. Противоречие.

Таким образом, $N_1 \cap N_2 = 1$. Так как $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то возьмем в группе G $\mathfrak{X}$-проектор H. Тогда HN_i/N_i $\mathfrak{X}$-проектор в G/N_i, $i = 1, 2$. Из $G/N_i \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$ следует, что HN_i/N_i — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G/N_i, $i = 1, 2$. По лемме 2.2 HN_i — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, $i = 1, 2$. По лемме 2.1 $HN_1 \cap HN_2$ — $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. По теореме 1 из [9] и лемме А.1.2 из [2] $HN_1 \cap HN_2 = H(N_1 \cap N_2) = H$. Следовательно, получаем противоречие $G/N_1 \cap N_2 \simeq G \in \mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{F}}$.

Доказательство того, что $\mathfrak{X}_{sn_\mathfrak{F}}$ является формацией, проводится аналогично, используя свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп из леммы 2.3, а также лемму 3.1.3 из [6]. Теорема доказана.

Следствие 2.14.1. *Если $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$ — формация.*

Доказательство. Так как насыщенная формация является классом Шунка, то из леммы 2.13 получаем, что $\mathfrak{X}_{rn_\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{S} = N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$. Поэтому по теореме 2.14 $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$ — формация. Следствие доказано.

Теорема 2.15. *Если $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная формация.*

Доказательство. По теореме 2.14 $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$ — формация.

Пусть $G/\Phi(G) \in N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$. Возьмем произвольный $\mathfrak{X}$-проектор H группы G. Тогда $H\Phi(G)/\Phi(G)$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G/\Phi(G)$. Поэтому, $H\Phi(G)/\Phi(G) \lhd$

$G/\Phi(G)$. Откуда $H\Phi(G) \lhd G$. Обозначим $K = H\Phi(G)$. Так как $G/\Phi(G) \in \mathfrak{S}$, то G разрешимая группа. Тогда H и H^x для любого $x \in G$ являются $\mathfrak{X}$-покрывающими подгруппами в G, а значит, и группы K. Кроме того, H и H^x сопряжены в K. По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(H)K = N_G(H)H\Phi(G) = N_G(H)$. Следовательно, $G \in N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$. Теорема доказана.

3. Заключение. Покажем, что в теореме 2.14 в утверждении 2) насыщенную формацию $\mathfrak{X}$ для $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$ нельзя заменить на класс Шунка.

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{S} |\ G/G'$ есть $2'$−группа), $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_3$. В [9] показано, что $\mathfrak{X}$ является классом Шунка. Рассмотрим группу $G = H \times C_2 = H \times C_2^*$, где $|C_2| = |C_2^*| = 2$, подгруппа $H = [Q_8]C_3$, где Q_8 — группа кватернионов порядка 8, C_3 — циклическая подгруппа порядка 3 из $AutQ_8$. Подгруппа H является $\mathfrak{X}$-проектором в G и $H = Core_G(H)$. Имеем $G/H \simeq C_2 \notin \mathfrak{N}_3$, $G/C_2 \simeq H \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$, $G/C_2^* \simeq H \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$. Но $G/C_2 \cap C_2* \simeq G \notin \mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_{sn_{\mathfrak{F}}}$ не является формацией.

Гашюц в [1] доказал, что в классе разрешимых групп $N(\mathfrak{X})$ для класса Шунка $\mathfrak{X}$ является классом Шунка. Теорема 2.15 уточняет этот результат для насыщенной формации $\mathfrak{X}$.

Покажем, что обратное утверждение к теореме 2.15 не имеет места.

Пример 3.2. Пусть $\mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{S} |\ G/G'$ есть $2'$−группа). В [1] установлено, что $\mathfrak{X}$ является классом Шунка, $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$. Тогда $N(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная формация. Так как $\mathfrak{X}$ не R_0-замкнут, то $\mathfrak{X}$ не является формацией.

Abstract. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. A subgroup H of a group G is called an $\mathfrak{F}$-accessible if there is a chain $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ such that for every $i = 1, 2, \ldots, n$ either H_{i-1} is normal in H_i or $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. In the paper the properties of finite groups with $\mathfrak{F}$-accessible $\mathfrak{X}$-projectors for for Schunck class $\mathfrak{X}$ are studied.

Литература

1. W. Gaschütz, Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups, Canberra: Australian. Nat. Univ., 1979.

2. K. Doerk, T.O. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin-New York. Walter De Gruyter, 1992.

3. W. Gaschütz, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Z., **80**. № 4 (1963), 300–305.

4. H. Schunck, $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Z., **97**. № 4 (1967) 326–330.

5. R. Erickson, Projectors of finite groups, Commun. Algebra, **10**. № 18 (1982) 1919 1938.

6. С.Ф. Каморников, М.В. Селькин, Подгрупповые функторы и классы конечных групп, Мн.: Бел. навука, 2003.

7. Л.А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва, Наука, 1978.

8. А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук, О решетках подгрупп конечных групп, В кн. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев: Ин-т мат-ки АН Украины, Киев, 1993. 27–54.

9. Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко, Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп, Доклады НАН Беларуси, **48**. № 4 (2004) 34–37.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 14.04.06