

УДК 512.542

Об одном свойстве ненильпотентной однопорожденной τ -замкнутой ω -насыщенной формации

И. П. ШАБАЛИНА

Все рассматриваемые нами группы конечны. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним, что подгрупповой функтор Скибы τ [1] сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

- 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ;
- 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

В дальнейшем τ обозначает некоторый подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним некоторые определения и обозначения работы [2].

Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$. Всякую функцию вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют ω -локальным спутником.

Символ $G_{\omega d}$ служит для обозначения наибольшей нормальной подгруппы в G , у которой каждый композиционный фактор H/K — ωd -группа (т.е. порядок группы H/K делится хотя бы на одно число из ω). Полагают $G_{\omega d} = 1$, если в G нет нормальных подгрупп с таким свойством.

Пусть f — произвольный ω -локальный спутник. Тогда символом $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп

$$(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω -локального спутника f , то говорят, что f — ω -локальный спутник этой формации. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω -насыщенной, если из $G/O_\omega(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Всякую формацию считают 0-кратно ω -насыщенной. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n -кратно ω -насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$ -кратно ω -насыщенными формациями.

Легко видеть, что множество $l_\tau^{\omega n}$ всех τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций является полной решеткой.

Пересечение всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, содержащих данную группу G , снова является τ -замкнутой ω -насыщенной формацией. Такую формацию будем обозначать через $l_\tau^\omega \text{form}(G)$ и называть однопорожденной l_τ^ω -формацией или однопорожденной τ -замкнутой ω -насыщенной формацией.

Как показывают работы [3,4,5,6], решение многих вопросов теории формаций сводится к исследованию различных типов однопорожденных формаций. Данная работа посвящена дальнейшему изучению однопорожденных l_τ^ω -формаций.

Лемма 1 [7]. В однопорожденной τ -замкнутой ω -насыщенной формации содержится лишь конечное число разрешимых τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций.

На множестве всех подгрупповых функторов вводят частичный порядок $\leq$, полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$. Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i \mid i \in I\}$ определяют их пересечение $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$:

$$\tau(G) = \bigcap_{i \in I} \tau_i(G)$$

для любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Через $\bar{\tau}$ обозначают пересечение всех таких замкнутых подгрупповых функторов τ_i , для которых $\tau \leq \tau_i$.

Напомним, что если τ -замкнутая ω -насыщенная формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна, но нильпотентна каждая ее собственная τ -замкнутая ω -насыщенная подформация, то $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной ненильпотентной формацией.

Лемма 2 [8]. *Формация $\mathfrak{H}$ является минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной ненильпотентной формацией тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{H} = \tau^\omega \text{form}(H),$$

где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^\omega$, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $H = [R]Q$ — pd -группа Шмидта с $\Phi(H) = 1$, где $R = O_p(H) = F_p(H)$, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ — простое число;
- 2) $R = H^{\omega_p}$ — неабелева pd -группа для некоторого простого числа $p \in \omega$ и все собственные $\bar{\tau}$ -подгруппы группы H — p -группы; более того, если $|\omega \cap \pi(R)| > 1$, то группа $H = R$ не имеет неединичных собственных $\bar{\tau}$ -подгрупп;
- 3) R — ω' -группа и все собственные $\bar{\tau}$ -подгруппы группы H нильпотентны.

Минимальным τ -значным n -кратно ω -локальным V -спутником формации $\mathfrak{F}$ будем называть ее ω -локальный V -спутник f со следующими значениями:

$$f(a) = \begin{cases} l_\tau^{\omega_n} \text{form}(\mathfrak{F}(F_p)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}), \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}), \\ l_\tau^{\omega_n} \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Лемма 3 [9]. *Если*

$$\mathfrak{F} = l_\tau^{\omega_{n+1}} \text{form}(\mathfrak{X}),$$

где $n \geq 0$ и f — минимальный $l_\tau^{\omega_n}$ -значный ω -локальный V -спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = l_\tau^{\omega_n} \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = l_\tau^{\omega_n} \text{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p \in \omega$;
- 3) $\mathfrak{F} = LF_\omega < g >$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$ и $g(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$;
- 4) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Лемма 4 [10]. *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) G — разрешимая бипримарная группа;
- 2) G^ω является силовской q -подгруппой в G , q — простое число;
- 3) G/G^ω — циклическая p -группа, p — простое число;
- 4) $G^\omega/\Phi(G^\omega)$ — главный фактор группы G , причём если $|G^\omega/\Phi(G^\omega)| = q^b$, то $q^b \equiv 1 \pmod{p}$ и b есть показатель числа q по модулю p ;

5) Если $P = \langle a \rangle$ — силовская p -подгруппа из G , то $a^p \in Z(G)$;

6) Если G^n абелева, то $\Phi(G^n) = 1$.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $S_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$ обозначают множество всех таких групп H , что $H \in \overline{\tau}(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$ ($\overline{\tau}$ — пересечение всех таких замкнутых подгрупповых функторов τ_i , для которых $\tau \leq \tau_i$).

Лемма 5 [1, с.24]. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство

$$\tau \text{form}(\mathfrak{X}) = \text{HR}_0 S_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

Максимальной τ -замкнутой ω -насыщенной подформацией τ -замкнутой ω -насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая ее собственная τ -замкнутая ω -насыщенная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой τ -замкнутой ω -насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$$

выполняется

$$\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}.$$

Лемма 6 [11]. В том и только в том случае τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную ω -насыщенную подформацию, когда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\tau}^{\omega} \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{M}$ — ω -насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная формация, при этом:

1) всякая ω -насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee_{\tau}^{\omega} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee_{\tau}^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ — это длина решетки $\mathfrak{F}/(1)$. Напомним, что длина $l(c)$ конечной цепи C — это число $|C| - 1$. Говорят, что частично упорядоченное множество P имеет длину n и пишут $l(P) = n$, где n — натуральное число, если в P существует цепь длины n и все цепи в P имеют длину $\leq n$.

Теорема 1. В каждой ненильпотентной однопорожденной τ -замкнутой ω -насыщенной формации содержится лишь конечное множество τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций с нильпотентным дефектом 1.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_{\tau}^{\omega} \text{form}(G)$ для некоторой группы G . Тогда по лемме 1 в $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество разрешимых (в частности, нильпотентных) τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций.

Ввиду леммы 2 каждая минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} = l_{\tau}^{\omega} \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^n$, что выполняется одно из следующих условий:

1) $H = [R]Q$ — pd -группа Шмидта с $\Phi(H) = 1$, где $R = O_p(H) = F_p(H)$, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ — простое число;

2) $R = H^{\mathfrak{M}}$ — неабелева pd -группа для некоторого простого числа $p \in \omega$ и все собственные $\bar{\tau}$ -подгруппы группы H — p -группы; более того, если $|\omega \cap \pi(R)| > 1$, то группа $H = R$ не имеет неединичных собственных $\bar{\tau}$ -подгрупп;

3) R — ω' -группа и все собственные $\bar{\tau}$ -подгруппы группы H нильпотентны.

Обозначим через f — минимальный τ -замкнутый ω -локальный V -спутник формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3

$$f(a) = \begin{cases} \tau\text{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ \tau\text{form}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Пусть относительно группы H выполняется условие 1). Тогда H — группа Шмидта. По лемме 4 каждая группа Шмидта разрешима. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций вида $l_\tau^\omega \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{M}}$, что выполняется условие 1).

Пусть относительно группы H выполняется условие 2). Так как R — неабелева pd -группа, то $F_p(H) = 1$. Следовательно,

$$H \simeq H/F_p(H) \in f(p) = \tau\text{form}(G/F_p(G)).$$

Значит, $p \in \pi(G) \cap \omega$. Поэтому, $H \in \text{form}(S_\tau(G/F_p(G)))$. Следовательно, по лемме 5 H является гомоморфным образом некоторой группы из

$$S_\tau(G/F_p(G)).$$

Но G — конечная группа. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций вида $l_\tau^\omega \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{M}}$, что выполняется условие 2).

Пусть теперь относительно группы H выполняется условие 3). Тогда $O_\omega(H) = 1$. Следовательно,

$$H \simeq H/O_\omega(H) \in f(\omega') = \tau\text{form}(G/O_\omega(G)).$$

Если R — неабелев монолит группы H , то ввиду леммы 5 $H \in \text{H}(S_\tau(G/O_\omega(G)))$. Но G — конечная группа. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций вида $l_\tau^\omega \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{M}}$, что R — неабелева ω' -группа. Пусть R — абелева ω' -группа. Так как по условию $H/R \in \mathfrak{M}$, то H — разрешимая группа. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций вида $l_\tau^\omega \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{M}}$, что R — абелева ω' -группа. Следовательно, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций вида $l_\tau^\omega \text{form}(H)$, где H — такая монолитическая группа с монолитом $R = H^{\mathfrak{M}}$, что выполняется условие 3). Таким образом, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных подформаций.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ненильпотентная τ -замкнутая ω -насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$, содержащая нильпотентную максимальную τ -замкнутую ω -насыщенную подформацию. По лемме 6

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_\tau^\omega \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторая нильпотентная τ -замкнутая ω -насыщенная, $\mathfrak{H}$ — минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная формации. Значит, из доказанного в предыдущих абзацах следует, что в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций с нильпотентным дефектом 1. Теорема доказана.

Напомним, что решетка называется модулярной, если для любых элементов x, y, z решетки выполняется

$$x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Лемма 7 [12]. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций является модулярной.

Лемма 8 [13, с.27]. Подрешетка модулярной решетки модулярна.

Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется: решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение; решеткой с относительными дополнениями, если каждый ее интервал $[a, b]$ является решеткой с дополнениями. Пусть L — решетка с нулем 0 и $a \in L$. Элемент b называется дополнением элемента a в L , если

$$a \wedge b = 0, a \vee b = 1.$$

Лемма 9 [13, с.31]. Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.

Напомним, что для любой формации $\mathfrak{F}$ символом $\mathfrak{F}_0$ обозначают пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$. Символом $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ обозначается такая подрешетка решетки l_{τ}^{ω} , которая состоит из всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_0$ ($\mathfrak{F}$ — непустая τ -замкнутая ω -насыщенная формация).

Атом решетки — это ее наименьший ненулевой элемент, т.е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$.

Лемма 10 [7]. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная τ -замкнутая ω -насыщенная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee_{\tau}^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая минимальная τ -замкнутая ω -насыщенная ненильпотентная формация из $\mathfrak{F}$.

Лемма 11 [14]. Любая модулярная решетка L с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.

Лемма 12 [13, с.32]. В решетке L конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент a является объединением содержащихся в нем атомов.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ -замкнутая ω -насыщенная формация и $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ представим в виде

$$\mathfrak{M} = \vee_{\tau}^{\omega} (\mathfrak{F}_0 \vee_{\tau}^{\omega} \mathfrak{H}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных ненильпотентных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Ввиду лемм 7 и 8 решетка τ -замкнутых ω -насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ модулярна. Следовательно, решетка $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$, как подрешетка модулярной решетки, также модулярна. Применяя лемму 9, получаем, что $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ — модулярная решетка с относительными дополнениями. Кроме того, ввиду теоремы 1 и леммы 10 решетка $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ имеет конечное число атомов. Значит, по лемме 11 решетка имеет конечную длину. Применяя теперь к решетке $\mathfrak{F}/_{\tau}^{\omega} \mathfrak{F}_0$ леммы 12 и 10, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Abstract. In this paper we study the one-generated τ -closed ω -saturated formations of finite groups.

Литература

1. А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.
2. L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups, *Siberian Advances in Mathematics*, **10**, № 2 (2000), 1–30 (Russian).
3. В. А. Ведерников, Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3, *Вопросы алгебры*, Минск, Вып. 6 (1992), 16–21.
4. А. Н. Скиба, О локальных формациях конечных групп с S -замкнутыми подформациями, *Докл. АН БССР*, **23**, № 8 (1979), 677–680.
5. А. Н. Скиба, Формация с заданной системой подформаций, *Докл. АН БССР*, **23**, № 12 (1979), 1073–1076.
6. Е. А. Таргонский, О локальных формациях с нильпотентными немаксимальными собственными локальными подформациями, *Вопросы алгебры*, Минск, Вып. 1 (1985), 118–124.
7. И. П. Шабалина, О τ -замкнутых ω -локальных формациях $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/\omega\mathfrak{F}_0$ является решеткой с дополнениями, Гомель, 2003 (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 40).
8. В. М. Селькин, Минимальные τ -замкнутые ω -локальные ненильпотентные формации, *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*, № 3(3) (2000), 48–51.
9. И. П. Шабалина, Модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций, Гомель, 2002 (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 22).
10. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные, *Матем. сб.*, **31** (1924), 366–372.
11. И. П. Шабалина, Формации групп с максимальной ω -локальной нильпотентной подформацией, Гомель, 2002 (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 25).
12. И. П. Шабалина, О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, № 1 (2003), 28–30.
13. Г. Биркгоф, Теория решеток, Москва, Наука, 1984.
14. Н. Г. Жевнова, ω -локальные формации с дополняемыми подформациями, Автореф. дис. к-та физ.-мат. наук, Д 02.12.01, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Гомель, 1997.