Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(38), 2006

УДК 512.542

Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1

А. И. Рябченко

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используется терминология, принятая в [1–3].

Важной характеристикой исследуемой формации $\mathfrak{F}$ служит существование в ней подформаций того или иного вида, а также их взаимное расположение в $\mathfrak{F}$. Идея изучения формаций по заданной структуре подформаций получила широкое распространение при исследовании внутреннего строения формаций различных типов. В теории насыщенных формаций этот подход привел к возникновению таких понятий, как минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации [4] или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [5], $\mathfrak{H}$-дефект насыщенной формации [6].

Изучение ненильпотентных ω-насыщенных формаций, имеющих нильпотентную максимальную ω-насыщенную подформацию, проведено Дж. Джехадом [7] и Н.Г.Жевновой [8]. Классификация неразрешимых ω-насыщенных формаций, имеющих разрешимую максимальную ω-насыщенную подформацию, получена в [9, 10]. В дальнейшем, в совместных работах автора и В.Г.Сафонова было дано описание не π-разложимых и не π-нильпотентных ω-насыщенных формаций с π-разложимой [11] и π-нильпотентной [12, 13] максимальной ω-насыщенной подформацией соответственно.

В настоящей работе изучено внутреннее структурное строение не π-специальных ω-насыщенных формаций, имеющих π-специальную максимальную ω-насыщенную подформацию.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае π-специальный l^{ω}-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-специальная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная π-специальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$;

2) всякая ω-насыщенная не π-специальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X})$.

2. Основные понятия и обозначения

Напомним некоторые из основных определений и обозначений.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел. Тогда через ω' обозначают дополнение к ω во множестве всех простых чисел.

Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называют ω-локальным спутником. Если f — произвольный ω-локальный спутник, то

$$LF_{\omega}(f) = \{G | G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\},$$

где $G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K) \cap \omega \neq \varnothing$, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, равная пересечению централизаторов всех pd-главных факторов группы G .

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f ее ω-локальный спутник. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называют внутренним ω-локальным спутником.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп и p — простое число. Тогда полагают, что

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) | G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

Ввиду теоремы 1 [1, с. 118] формация является ω-локальной тогда и только тогда, когда она является ω-насыщенной.

Через l^ω обозначают совокупность всех ω-насыщенных формаций.

Полагают $l^\omega\mathrm{form}\mathfrak{F}$ равным пересечению всех тех ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{F}$.

Для любых двух ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H} = l^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Всякое множество ω-насыщенных формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee^\omega$, является решеткой. Таковым, например, является множество l^ω всех ω-насыщенных формаций.

Через $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Длину решетки $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^\omega$ и называют $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

ω-Насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел.

Группу G называют π-специальной, если в ней существует нильпотентная нормальная π-холлова подгруппа.

3. Используемые результаты

Ниже приведем некоторые известные факты теории формаций, сформулировав их в ввиде следующих лемм.

Лемма 1 [14]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная ω-насыщенная не π-специальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация.*

Следующие две леммы являются частным случаем лемм 5.2.7 и 5.2.8 [3, с. 193–194].

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-насыщенная формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда*

$$|\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}|^\omega \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^\omega.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{H}$ — ω*-насыщенные формации, причем* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{X}$. *Тогда если* m, r *и* t *соответственно* $\mathfrak{H}^{\omega}$*-дефекты формаций* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{F}$ *и* m, $r < \infty$, *то* $t \leq m + r$.

Лемма 4 [1]. *Решетка всех* ω*-насыщенных формаций* l^{ω} *модулярна.*

Лемма 5 [1]. *Если* $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ *и* f — *минимальный* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}/\ G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p)=\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p)$ *для все* $p \in \omega$;

3) если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$ *и* p — *некоторый фиксированный элемент из* ω, *то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$, *где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \backslash \{p\}) \cup \{\omega'\}$,

$$f_1(p) = \mathrm{form}(G|G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(g)$, *где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$.

Лемма 6 [1]. *Пусть* f_i — *такой внутренний* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *что* $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$, *где* $i \in I$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{F}_2 = LF_{\omega}(f)$, *где* $f = f_1 \vee f_2$.

Лемма 7 [15]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* ω*-насыщенной не* π*-специальной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, *где* G — *такая не* π*-специальная монолитическая группа с монолитом* P, *что* G/P π*-специальна и либо* $\tau = \pi(P) \cap \pi = \varnothing$, *либо* $\tau \neq \varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) группа P *неабелева, причем, если* $\tau \cap \pi = \{p\}$, *то* $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}}$, *в противном случае* $P = G^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$;

2) $G = [P]H$, *где* $P = C_G(P)$ — p*-группа, а* H — *такая монолитическая группа с абелевым монолитом* Q, *что* $p \notin \pi(Q)$ *и* $Q = H^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$.

Лемма 8 [1]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ — *формации, причем* $\mathfrak{M} = LF_p(m)$ *для некоторого внутреннего спутника* m. *Формация* $\mathfrak{F}$ *является* p*-локальной в том и только том случае, когда выполняется следующее условие: либо* $p \in \pi(\mathfrak{M})$, *либо формация* $\mathfrak{H}$ *является* p*-локальной. Более того, при выполнении этого условия* $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, *где* $f(p') = m(p')\mathfrak{H}$ *и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Лемма 9 [2, с. 41]. *Пусть* A *монолитическая группа с неабелевым монолитом,* $\mathfrak{M}$ — *некоторая полуформация и* $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Лемма 10 [1]. *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *являются* ω*-насыщенными, то формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *также является* ω*-насыщенной.*

Лемма 11 [1]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = LF_{\omega}(h)$, $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(m)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда* $\mathfrak{F}$ — ω*-локальная формация и* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если} \quad p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если} \quad p \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Лемма 12 [1]. *Пусть* H/K — *главный фактор конечной группы* G, $p \in \pi(H/K)$. *Тогда* $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.

Лемма 13 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *произвольная непустая формация и пусть у каждой группы* $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$*-корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ *не имеет фраттиниевых* G*-главных факторов. Тогда если* A — *монолитическая группа из* $\mathrm{form}\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$, *то* $A \in \mathrm{H}(\mathfrak{X})$.

Лемма 14 [1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация и f — ее ω-локальный спутник. Если $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

4. Основной результат

В дальнейшем через $\mathfrak{X}$ будем обозначать формацию всех π-специальных групп, а $\mathfrak{X}^{\omega}$-дефект ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называть ее π-специальным l^{ω}-дефектом. Заметим, что класс всех π-специальных групп совпадает с классом $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{G}_{\pi'}$.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация. Тогда формация $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{H}$ является ω-насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{H}$. Как известно, формация $\mathfrak{N}_{\omega}$ является ω-насыщенной, т.е. она p-насыщена для любого $p \in \omega$. Заметим, что формация $\mathfrak{N}_{\omega}$ имеет такой внутренний p-локальный спутник n, что $n(p) = (1)$ и $n(p') = \mathfrak{N}_{\omega}$.

Тогда по лемме 8 формация $\mathfrak{F}$ является p-локальной. Таким образом, $\mathfrak{F}$ является p-локальной формацией для всех $p \in \omega$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной или ω-насыщенной. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть π-специальный l^{ω}-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Так как $\mathfrak{F}$ не является π-специальной формацией, то по лемме 1 в $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация $\mathfrak{H}_1$. По условию $\mathfrak{M} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ — максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-специальная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Пусть π-специальные l^{ω}-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_1$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-специальная формация, то $m = 0$. Так как $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не π-специальная формация, то ее π-специальный l^{ω}-дефект r равен 1. В силу леммы 3 для π-специального l^{ω}-дефекта формации $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство $t \leq m + r = 0 + 1 = 1$.

Если $t = 0$, то $\mathfrak{F}$ — π-специальная формация, что противоречит условию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Таким образом, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}|^{\omega} = 1$.

Докажем теперь справедливость утверждения 1) второй части теоремы.

Так как $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1$ — максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}_1$, то, в силу леммы 4, имеет место решеточный изоморфизм

$$\left(\left((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}\right) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1\right) /^{\omega} \left((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}\right) \simeq \mathfrak{H}_1 /^{\omega} \mathfrak{H}_1 \cap \left((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}\right) =$$

$$= \mathfrak{H}_1 /^{\omega} (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1 /^{\omega} \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}$ — максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$.

Тогда, поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{X}$, то всякая ω-насыщенная π-специальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}$.

Для доказательства утверждения 2) покажем прежде, что в $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не π-специальных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ — π-специальная максимальная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим обратное, т.е. что в $\mathfrak{F}$ существует $\mathfrak{H}_2$ — минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация, отличная от $\mathfrak{H}_1$. Поскольку $\mathfrak{M}_1$ является π-специальной формацией, то $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{M}_1$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_2 \vee^{\omega} \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}_1.$$

По лемме 5 формации $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{M}_1$ имеют такие внутренние ω-локальные спутники h_i и m соответственно, что

$$h_i(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(A/F_a(A) | A \in \mathfrak{H}_i), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}_i), \\ \mathfrak{H}_i, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{H}_i); \end{cases}$$

где $i = 1, 2$ и

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(A/F_a(A) | A \in \mathfrak{M}_1), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}_1); \end{cases}$$

Тогда по лемме 6 получаем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, что $f(p) = h_i(p) \vee m(p)$ для всех $p \in \omega$ и

$$f(\omega') = \mathfrak{H}_i \vee \mathfrak{M}_1 = \mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Из леммы 7 следует, что $\mathfrak{H}_i = l^{\omega}\mathrm{form}G_i$, где G_i — такая не π-специальная монолитическая группа с монолитом P_i, что G_i/P_i — π-специальна и либо $\tau = \pi(P_i) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) группа P_i неабелева, причем, если $\tau = \{p\} \subseteq \pi$, то $P_i = G_i^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{\pi'}}$, в противном случае $P_i = G_i^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$;

(2) $G_i = [P_i]H_i$, где $P_i = C_{G_i}(P_i)$ — p_i-группа, а H_i — такая монолитическая группа с абелевым монолитом Q_i, что и Q_i совпадает с $\mathfrak{G}_{\pi'}$-корадикалом подгруппы H_i.

Пусть G_2 удовлетворяет условию (1), т.е. P_2 — неабелева ωd-группа.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ формацию, равную $\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$ Поскольку, по лемме 15, $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$ — ω-насыщенная формация и $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$, то

$$\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}.$$

Но $G_2 \in \mathfrak{F}$. Следовательно $G_2 \in \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$. Значит, $\mathfrak{R}$-корадикал группы G_2 содержится в $\mathfrak{N}_{\omega}$.

Пусть $G_2^{\mathfrak{R}} \neq 1$. Так как $\mathfrak{R}$-корадикал — нормальная в G_2 подгруппа и P_2 — единственная минимальная нормальная подгруппа в G_2, верно включение $P_2 \subseteq G^{\mathfrak{R}}$. Тогда получаем, что P_2 — неабелева минимальная нормальная подгруппа в G_2, содержится в нильпотентной подгруппе $G_2^{\mathfrak{R}}$ группы G_2. Противоречие.

Следовательно, $G_2^{\mathfrak{R}} = 1$. Поэтому $G_2 \in \mathfrak{R} = \mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$. Применяя лемму 9, имеем $G_2 \in \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1$. Тогда, так как $G_2 \notin \mathfrak{M}_1$, то $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Поэтому $\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Поскольку $\mathfrak{H}_2$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{X}$-формация, то $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь для группы G_2 выполняется условие (2), т.е. $G_2 = [P_2]H_2$. По условию H_2 — монолитическая группа с абелевым монолитом Q_2 и $H_2^{\mathfrak{G}_{\pi'}} = Q_2$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\pi'}$ — насыщенная формация, то $Q_2 \not\subseteq \Phi(H_2)$, так как иначе из условия $H_2/Q_2 \in \mathfrak{G}_{\pi'}$ следует $H_2 \in \mathfrak{G}_{\pi'}$. Последенее невозможно, в силу того, что Q_2 является π-группой.

Легко видеть, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$. Кроме того, $G_2/P_2 \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{M}_1$ и $G_2 \notin \mathfrak{M}_1$. Поэтому $P_2 = G_2^{\mathfrak{M}_1}$. По условию $P_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}$. Значит, $G_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$.

По лемме 10 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$ является ω-насыщенной формацией. Так как $\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2$, то $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$.

Но тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$, так как $\mathfrak{F}$ — наименьшая ω-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_2$. Следовательно, $G_1 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$. Поскольку, $G_1/P_1 \in \mathfrak{M}_1$ и $G_1 \notin \mathfrak{M}_1$, то $P_1 = G_1^{\mathfrak{M}_1} \in \mathfrak{N}_{p_2}$, т.е. P_1 является абелевой p_2-группой.

Так как $G_2 \in \mathfrak{F}$, то $G_2/F_{p_2}(G_2) \in f(p_2) = h_1(p_2) \vee m(p_2)$. Но

$$H_2 \simeq G_2/P_2 = G_2/F_{p_2}(G).$$

Поэтому $H_2 \in h_1(p_2) \vee m(p_2)$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_\pi = LF_\omega(n)$ и $\mathfrak{G}_{\pi'} = LF_\omega(g)$, где $n(p) = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi \cap \omega$ и $g(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ для всех $p \in \pi' \cap \omega$. Тогда по лемме 11 формация $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$ имеет такой ω-локальный спутник x, что

$$x(p) = \begin{cases} n(p)\mathfrak{G}_{\pi'} & \text{для всех } p \in \pi \cap \omega, \\ \mathfrak{G}_{\pi'} & \text{для всех } p \in \omega \backslash \pi; \end{cases}$$

и $x(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$.

Таким образом, если $p_2 \in \pi'$, то $x(p_2) = \mathfrak{G}_{\pi'} = \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. Если же $p_2 \in \pi$, то $x(p_2) = \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. Следовательно, $x(p_2) = \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. В силу замечания 1 [1, с. 121], спутник x является максимальным внутренним ω-локальным спутником формации $\mathfrak{X}$, так как $x(p) = \mathfrak{N}_p x(p)$ для всех $p \in \omega$ и $x(\omega') = \mathfrak{X}$.

Так как $m(p_2)$ — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{X} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$, а формация $\mathfrak{X}$, как было показано выше, имеет такой максимальный внутренний ω-локальный спутник x, что $x(p_2) = \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$, то

$$H_2 \in h_1(p_2) \vee m(p_2) \subseteq h_1(p_2) \vee \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}.$$

Заметим также, что

$$h_1(p_2) = \mathrm{form}(G_1/F_{p_2}(G_1)) = \mathrm{form}(H_1).$$

Таким образом,

$$H_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'} \vee \mathrm{form}(H_1) = \mathrm{form}(\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'} \cup \{H_1\}).$$

Поскольку $G_2 = [P_2]H_2$ и P_2 является p_2-группой, то, применяя лемму 12, получаем, что $O_{p_2}(H_2) = 1$. Поэтому Q_2 не является p_2-группой.

Так как $Q_2 = H_2^{\mathfrak{G}_{\pi'}}$, то $H_2 \notin \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. Значит,

$$H_2 \in \mathrm{form}(\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'} \cup \{H_1\}) \backslash \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}.$$

Так как для любой группы A из $\{H_1\} \cup \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$ подгруппа $A^{\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов, то по лемме 13 получаем, что $H_2 \in \mathrm{H}(\{H_1\} \cup \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'})$.

Если $H_2 \simeq L/N$, для некоторой группы $L \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$, то $H_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. Противоречие.

Следовательно, H_2 не является гомоморфным образом группы из $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$. Поскольку $H_2 \notin \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$ и $H_1/Q_1 \in \mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{G}_{\pi'}$, то $H_2 \simeq H_1$.

Но тогда

$$G_2/O_{p_2}(G_2) = G_2/P_2 \simeq H_2 \simeq H_1 \simeq G_1/F_{p_2}(G_1) \in h_1(p_2) \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Применяя лемму 14, получаем, что $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь P_2 — ω'-группа. Заметим, что если P_2 — неабелева, то этот случай аналогичен (1). Значит, P_2 — абелева p_2-группа.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2$. Поскольку формация $\mathfrak{H}_1$ содержится в формации $\mathfrak{H}$ и π-специальный l^ω-дефект формации $\mathfrak{H}_1$ равен 1, то по лемме 2 получаем, что $|\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|^\omega \geq 1$. С другой стороны, так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и π-специальный l^ω-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то по лемме 2, $|\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|^\omega \leq 1$. Значит, π-специальный l^ω-дефект формации $\mathfrak{H}$ равен 1.

Поэтому в $\mathfrak{H}$ существует π-специальная максимальная ω-насыщенная подформация $\mathfrak{L}$. Понятно, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_2$. Поскольку P_2 является абелевой p_2-группой и единственной минимальной нормальной подгруппой в G_2 такой, что $G_2/P_2 \in \mathfrak{L} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$, то $G_2^{\mathfrak{L}} = P_2$. Это означает, что $G_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Кроме того, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. А так как по лемме 10 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ является ω-насыщенной формацией и $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_2$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ и $G_1 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Таким образом, аналогично получаем, что P_1 является p_2-группой.

Рассмотрим решетку $\mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{X}/^\omega\mathfrak{X}$. Ввиду леммы 4

$$\mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{X}/^\omega\mathfrak{X} \simeq \mathfrak{H}/^\omega\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}/^\omega\mathfrak{L}.$$

Таким образом, $\mathfrak{X}$ является максимальной ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{X} = \mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{X} = \mathfrak{H}_2 \vee^\omega \mathfrak{X}$. Значит $G_1 \in \mathfrak{H}_2 \vee^\omega \mathfrak{X}$. Следовательно,

$$G_1 \in l^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{X}) = l^\omega\mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X}).$$

Так как P_1 — p_2-группа и $p_2 \in \omega'$, то $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X})$. Но $G_1 \notin \mathfrak{X}$. Значит, $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X})\backslash\mathfrak{X}$. Поскольку для любой группы A из $\{G_2\} \cup \mathfrak{X}$, подгруппа $A^{\mathfrak{X}}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов, то по лемме 13 получаем $G_1 \in \mathrm{H}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X})$. Так как $G_1 \notin \mathfrak{X}$ и $G_2/P_2 \in \mathfrak{X}$, то $G_1 \simeq G_2$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$.

Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не π-специальных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная не π-специальная ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда в силу уже доказанного и леммы 1 получаем, что $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, применяя лемму 4, получаем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}).$$

Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы.

Если $\omega = \{p\}$, а π — множество всех простых чисел, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1 [7]. *В том и только том случае p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную p-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^p (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^p (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если π — множество всех простых чисел, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 2 [8]. *В том и только том случае ω-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную ω-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная ω-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если ω и π равны множеству всех простых чисел, то из теоремы 1 получаем

Следствие 3 [6]. *В точности тогда нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — нильпотентная локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая ненильпотентная локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если ω — множество всех простых чисел, из теоремы 1 вытекает

Следствие 4. *В точности тогда π-специальный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — π-специальная локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не π-специальная формация, при этом:*

1) всякая π-специальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$;

2) всякая не π-специальная локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{X})$.

Abstract. In this paper we obtained a structure description of ω-saturated formations of finite groups with a π-special maximal ω-saturated subformation.

Литература

1. А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп, Матем. Труды, **2**, № 2 (1999), 114–147.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, Формации алгебраических систем, М., 1989.

3. А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. Л. А. Шеметков, Экраны ступенчатых формаций. Тр. VI Всесоюз. симпозиума по теории групп, Киев, 1980, 37–50.

5. А. Н. Скиба, О критических формациях, Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, № 4 (1980), 27–33.

6. А. Н. Скиба, Е. А. Таргонский, Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2, Математ. заметки, **41**, № 4 (1987), 490–499.

7. Джарадин Джехад, Классификация p-локальных формаций длины ≤ 3, Автореф. дис. к-та физ.-мат. наук, Д 02.12.01, Гом. гос. ун-т им.Ф.Скорины, Гомель, 1996.

8. Н. Г. Жевнова ω-Локальные формации с дополняемыми подформациями, Автореф. дис. к-та физ.-маи. наук, Д 02.12.01, Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины, Гомель, 1997.

9. И. Н. Сафонова, О частично насыщенных формациях с заданной системой подформаций, IX Бел. мат. конф., Гродно, 2004, 47–48.

10. В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова, О приводимых ω-насыщенных формациях с

разрешимым дефектом ≤ 2, Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, №5 (32) (2005), 162–165.

11. В. Г. Сафонов, А. И. Рябченко, ω-Насыщенные формации π-разложимого дефекта 1, Материалы Юбилейной научно-практической конференции, посвященной 75-летию со дня основания Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 14–15 июня 2005 г. Гомель, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины, 2005, 111–113.

12. V. Safonov, A. Rjabchenko, About ω-saturated formations with π-nilpotent defect 1, 5-th International Algebraic Conference in Ukraine, Abstracts (July 19–26, 2005), Lviv, 2005, 175.

13. В. Г. Сафонов, А. И. Рябченко, Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1, Вестник Мозырьского государственного педагогического университета, Мозырь, № 2(13) (2005), 16–20.

14. И. Н. Сафонова, О существовании $\mathfrak{H}_\omega$-критических формаций, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во Гомельского ун-та, Вып. 15 (1999), 121–129.

15. И. Н. Сафонова, К теории критических частично насыщенных формаций, Вопросы алгебры, Гомель, Изд-во Гомельского ун-та, Вып. 6 (2004), 82–87.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.06