

О ТРАЕКТОРИЯХ И ЛИНИЯХ ТОКА ЭНЕРГИИ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

Ф. И. Федоров и В. В. Филиппов

Найдены траектории и линии тока энергии неоднородных волн произвольной поляризации в изотропной прозрачной среде. В общем случае скорость перемещения энергии \mathbf{u} и фазовая скорость v такой волны различны, что приводит к искривлению траекторий движения энергии. Траектории могут быть двух видов, в зависимости от того, больше или меньше величины фазовой скорости проекция вектора \mathbf{u} на направление v . Величина лучевой скорости неоднородной волны всегда меньше или равна лучевой скорости однородной волны в той же среде. Рассматриваются частные случаи поляризации неоднородной волны, а также движение энергии неоднородной волны при полном внутреннем отражении.

Как известно, неоднородные волны являются значительно более сложным объектом, чем однородные волны, и существенно отличаются от последних по своим поляризационным свойствам [1]. Столь же значительны отличия неоднородных волн от однородных в отношении процесса распространения энергии [1-3].

Обычно при рассмотрении движения энергии неоднородных волн ограничиваются средним по времени вектором Умова—Пойнтинга, выражение для которого значительно проще, чем для мгновенного вектора. Однако при этом упускаются некоторые специфические черты поведения неоднородных волн, для учета которых необходимо рассматривать мгновенный вектор Умова—Пойнтинга. Именно таким путем Эйхенвальду удалось объяснить факт наличия поля неоднородной волны в оптически менее плотной среде при полном внутреннем отражении и выяснить ряд свойств потока энергии для этого случая [2, 3].

Настоящая работа имеет целью общее рассмотрение свойств потока энергии неоднородных волн в прозрачной изотропной среде. Поле однородной плоской волны в такой среде определяется соотношениями [1]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2, \quad \varphi = \omega \left(\frac{1}{c} \mathbf{m} \mathbf{r} - t \right), \quad m^2 = n^2 = \epsilon \mu, \quad (1)$$

где \mathbf{m} — вектор рефракции, n — показатель преломления для фазовой скорости, ϵ (μ) — диэлектрическая (магнитная) проницаемость среды. Для мгновенных плотности потока энергии и плотности энергии имеем соответственно [1]

$$\mathbf{P} = \frac{c}{16\pi\mu} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)^2 \mathbf{m}, \quad (2)$$

$$w = \frac{n^2}{16\pi\mu} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)^2. \quad (3)$$

Их отношение дает вектор скорости распространения энергии

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{w} = \frac{c\mathbf{m}}{n^2}, \quad (4)$$

который постоянен по величине и направлению и совпадает с вектором фазовой скорости волны $v_0 = c/n$.

Поле неоднородной волны в той же среде имеет вид [1]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \omega \left(\frac{1}{c} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r} - t \right), \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + i\mathbf{m}_2. \quad (5)$$

$$\mathbf{m}_1 = n_1 \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{m}_2 = n_2 \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{m}^2 = n^2 = n_1^2 - n_2^2 = \varepsilon \mu. \quad (6)$$

Все отличие от (1) связано с комплексным характером вектора рефракции \mathbf{m} . Вещественная часть его $\mathbf{m}_1 = n_1 \mathbf{n}_1$ определяет по направлению волновую нормаль (\mathbf{n}_1), а по величине — показатель преломления для фазовой скорости (n_1). Аналогично мнимая часть $\mathbf{m}_2 = n_2 \mathbf{n}_2$ определяет по направлению амплитудную нормаль \mathbf{n}_2 (нормаль к плоскости равных амплитуд), а по величине — коэффициент экстинкции (n_2). Вместо (2), (3) мы имеем теперь для плотности потока энергии и плотности энергии [1]

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}', \quad \mathbf{P}_0 = \frac{c}{8\pi\mu} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{m}_1 - i [\mathbf{m}_2 [\mathbf{E}\mathbf{E}^*]]), \quad \mathbf{P}' = \frac{c}{16\pi\mu} (\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{m} + \mathbf{E}^{*2} \mathbf{m}^*), \quad (7)$$

$$w = w_0 + w', \quad w_0 = \frac{1}{c} \mathbf{P}_0 \mathbf{m}_1, \quad w' = \frac{n^2}{cn_1^2} \mathbf{P}' \mathbf{m}_1. \quad (8)$$

Вектор фазовой скорости волны равен

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{m}_1}{n_1^2} = v\mathbf{n}_1, \quad v < v_0, \quad (9)$$

а вектор скорости течения энергии (лучевой скорости)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{w} = c \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}'}{\left(\mathbf{P}_0 + \frac{n^2}{n_1^2} \mathbf{P}' \right) \mathbf{m}_1} \neq \mathbf{v}. \quad (10)$$

Величины \mathbf{P}_0 , w_0 постоянны, а \mathbf{P}' , w' в фиксированной точке пространства периодически меняются с частотой 2ω , причем \mathbf{P}' также по направлению.¹ Ввиду этого вектор \mathbf{u} изменяется по величине и направлению вместе с фазой волны. Легко видеть, что средние значения величин \mathbf{P}' и w' равны нулю: $\overline{\mathbf{P}'} = \overline{w'} = 0$. В случае однородных волн все векторы \mathbf{P} , \mathbf{u} , \mathbf{v}_0 имели одно и то же (постоянное) направление. В отличие от этого, как видно из (7), (9), (10), даже постоянный средний вектор потока \mathbf{P}_0 не совпадает по направлению с фазовой скоростью \mathbf{v} и со средним вектором \mathbf{u} . Другой специфической чертой неоднородных волн является то, что направление среднего вектора потока энергии \mathbf{P}_0 (7) зависит от вектора $i[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]$, от поляризации волны, чего не было в случае однородных волн (2). В [1] показано, что при этом вектор \mathbf{P}' описывает в плоскости, параллельной векторам \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , эллипс, полуоси которого равны векторам $c/8\pi\mu |\mathbf{E}|^2 \mathbf{m}_1$ и $c/8\pi\mu |\mathbf{E}|^2 \mathbf{m}_2$. Поскольку $\mathbf{P}_0 \mathbf{n}_2 = 0$, то вектор \mathbf{P}_0 лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{n}_1 и

$$\mathbf{n}_3 = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] \quad (n_3^2 = 1). \quad (11)$$

В [1] было получено общее решение уравнений Максвелла для неоднородных плоских волн в однородной изотропной среде при заданном комплексном векторе рефракции.² Оно может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}_0 = \alpha n \mathbf{n}_3 + \beta [\mathbf{n}_3 \mathbf{m}], \quad (12)$$

где α , β — произвольные комплексные скалярные постоянные.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha^2 + \beta^2|} = \frac{1 + |\xi|^2}{|1 + \xi^2|}, \quad \xi = \frac{\beta}{\alpha}, \quad 1 \leq \gamma \leq \infty, \\ e^{2i\chi} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha^2 + \beta^2|} = \frac{1 + \xi^2}{|1 + \xi^2|}, \quad \theta = 2(\varphi_1 + \chi), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

¹ Исключением является случай круговой поляризации $\mathbf{E}^2 = 0$ [1], когда $\mathbf{P}' = 0$ и векторы \mathbf{P} и \mathbf{u} постоянны.

² Вектор рефракции находится из граничных условий.

Подставляя (12) в (7), (8) и опуская в \mathbf{P} и w множитель $\exp(-2\omega\mathbf{m}_2\mathbf{r}/c)$, получим после некоторых вычислений

$$\mathbf{P}_0 = \frac{nn_1c(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{8\pi\mu\gamma} (n\gamma\mathbf{n}_1 - n_2\sqrt{\gamma^2 - 1}\mathbf{n}_3), \quad (14)$$

$$\mathbf{P}' = \frac{n^2c(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{8\pi\mu\gamma} (\mathbf{m}_1 \cos \theta - \mathbf{m}_2 \sin \theta), \quad (15)$$

$$w_0 = \frac{n^2n_1^2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{8\pi\mu}, \quad w' = \frac{n^4(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{8\pi\mu\gamma} \cos \theta, \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \frac{c}{n} \frac{n(\gamma + \cos \theta)\mathbf{m}_1 - n \sin \theta \mathbf{m}_2 - n_1 n_2 \sqrt{\gamma^2 - 1} \mathbf{n}_3}{n_1^2 \gamma + n_2 \cos \theta}. \quad (17)$$

Здесь знак $\sqrt{\gamma^2 - 1}$ должен совпадать со знаком мнимой части комплексного числа $\xi = \beta/\alpha$.

С помощью этих выражений поведение энергии может быть исследовано при любой поляризации (определяемой коэффициентами α , β или γ , ξ , χ).

Для квадрата лучевой скорости (17) получаем

$$u^2 = \frac{c^2}{n^2} \left[1 - \frac{n^4}{(n_1^2 \gamma + n_2 \cos \theta)^2} \right]. \quad (18)$$

Отсюда следует, что лучевая скорость неоднородной волны меньше (или в крайнем случае равна) скорости $v_0 = c/n$ однородной волны в той же среде.

Равенство этих скоростей (поскольку $n_2 \neq 0$ для неоднородных волн) возможно лишь при единственном условии $\gamma = \infty$ (или $\alpha^2 + \beta^2 = 0$), что соответствует круговой поляризации ($\mathbf{E}^2 = 0$). В [1] было показано, что случай круговой поляризации в ряде отношений является особым, исключительным для неоднородных волн. Равенство $u = v_0$ является еще одной специфической особенностью круговой поляризации. Заметим, что поскольку $n^2 = n_1^2 - n_2^2 < n_1^2$, то лучевая скорость неоднородной волны может превышать ее фазовую скорость $v = c/n_1$. Из (13) очевидно, что случаи $\gamma = 1$ и $\gamma = \infty$ ($\xi = \pm i$) являются предельными. Второй случай, как уже отмечалось, соответствует единственной поляризации — круговой (правой или левой). При $\gamma = 1$ $\mathbf{E}_0 \sim \xi n \mathbf{n}_3 + n_1 \mathbf{n}_2 - i n_2 \mathbf{n}_1$, откуда находим, что вектор \mathbf{E} описывает эллипс, отношение полуосей которого χ равно

$$\chi = \frac{n_2}{\sqrt{\xi^2 n^2 + n_1^2}}. \quad (19)$$

Так как $0 \leq \xi^2 \leq \infty$, то $0 \leq \chi \leq n_2/n_1 < 1$.

Следовательно, случаю $\gamma = 1$ соответствует бесконечная совокупность эллиптических поляризаций вектора \mathbf{E} . Одна из полуосей вектора \mathbf{E} всегда направлена вдоль \mathbf{n}_1 и имеет постоянную (для всех ξ) длину n_2 . Вторая полуось при изменении ξ^2 от 0 до ∞ поворачивается в плоскости $(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ от направления \mathbf{n}_2 ($\xi = 0$) до направления \mathbf{n}_3 ($\xi^2 = \infty$), когда \mathbf{E}_0 становится линейным. Таким образом, с изменением ξ эллипс \mathbf{E}_0 поворачивается вокруг направления \mathbf{n}_1 , одновременно изменяя свою форму. Нетрудно проследить за изменением эллипса $\mathbf{H}_0 = 1/\mu [\mathbf{m}\mathbf{E}_0]$. В противоположность \mathbf{E}_0 вектор \mathbf{H}_0 линеен при $\xi = 0$ и описывает эллипс с отношением полуосей равным n_2/n_1 при $\xi^2 = \infty$.

Для заданной поляризации, т. е. при фиксированных параметрах ξ , γ и χ , лучевая скорость u , очевидно, достигает максимума при $\theta = 2(\varphi_1 + \chi) = 0$ и минимума при $\theta = \pi$, причем

$$u_{\text{макс.}}^2 = \frac{c^2}{n^2} \left[1 - \frac{n^4}{(n_1^2 \gamma + n_2)^2} \right], \quad u_{\text{мин.}}^2 = \frac{c^2}{n^2} \left[1 - \frac{n^4}{(n_1^2 \gamma - n_2)^2} \right]. \quad (20)$$

В свою очередь экстремум γ , помимо случая круговой поляризации ($\xi = \pm i$, $\gamma = \infty$), достигается при любом вещественном ξ ($\gamma = 1$). При этом $\chi = 0$ или $\chi = \pi$.

Нетрудно видеть, что пределы изменения u максимальны при $\gamma = 1$ ($0 \leq u \leq 2\pi_1 c / (2n_1^2 - n_2^2)$). При $\gamma \rightarrow \infty$ пределы сходятся к $u = c/n$.

Следовательно, в любой момент времени вектор \mathbf{u} имеет различную величину и направление в разных точках пространства, а в фиксированной точке меняется по величине и направлению со временем. Таким образом, поведение потока энергии и лучевой скорости неоднородных волн даже в простейшем случае прозрачной изотропной однородной среды имеет весьма сложный характер.

Отметим, что проекция вектора лучевой скорости \mathbf{u} (17) на направление единичного вектора

$$\mathbf{q} = \frac{n\sqrt{\gamma^2 - 1} \mathbf{n}_1 - n_2 \gamma \mathbf{n}_3}{\sqrt{n_1^2 \gamma^2 - n_2^2}}, \quad (21)$$

равная

$$u\mathbf{q} = c \frac{n_1}{n} \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{n_1^2 \gamma - n_2^2}}, \quad (22)$$

не зависит от фазы φ_1 , т. е. имеет одно и то же значение во всех точках поля волны в среде в любой момент времени. При этом в предельных случаях поляризации мы имеем, согласно (22), (17), при $\gamma = 1$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{n}_3 \perp \mathbf{u} = c \frac{(1 + \cos \theta) \mathbf{m}_1 - \sin \theta \mathbf{m}_2}{n_1^2 + n_2^2 \cos \theta}; \quad (23)$$

при $\gamma = \infty$ (круговая поляризация)

$$\mathbf{q} = \frac{nn_1 - n_2 n_3}{n_1} \parallel \mathbf{u} = \frac{c}{n} \mathbf{q} \parallel \mathbf{P}_0 \quad (\mathbf{P}' = 0). \quad (24)$$

Найдем траектории движения энергии поля неоднородной волны. Пусть координатные оси x, y, z направлены параллельно векторам $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ соответственно. Тогда на основании (17) имеем для компонент лучевой скорости по осям координат

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = v \frac{\gamma + \cos \theta}{\gamma + n_2/n_1^2 \cos \theta}, \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = -v \frac{n_2 \sin \theta}{n_1 \gamma + n_2/n_1^2 \cos \theta}, \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = -v \frac{n_2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}{n \gamma + n_2/n_1^2 \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из (25) следует, что проекция u_x скорости перемещения энергии на волновую нормаль \mathbf{n}_1 в общем случае не равна фазовой скорости v , а именно:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \quad u_x > v, \\ \text{при } \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad u_x = v, \\ \text{при } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \quad u_x < v, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Таким образом, перемещение энергии будет сопровождаться переходом ее в точки пространства с новой фазой. Однако для круговой поляризации ($\gamma = \infty$) имеем $u_x = v$, и движение энергии происходит синфазно, хотя полный вектор лучевой скорости \mathbf{u} не равен по величине и не параллелен вектору фазовой скорости \mathbf{v} . В этом случае имеет место полная аналогия с распространением плоской однородной волны в прозрачных кристаллах, когда вектор лучевой скорости образует некоторый угол

во всех точках пространства $\mathbf{P} \neq 0$, $\mathbf{u} \neq 0$ и линии движения энергии являются гладкими кривыми.

Очевидно, рис. 3 дает представление и о движении энергии неоднородной волны в оптически менее плотной среде при полном внутреннем отражении на границе двух прозрачных сред. В этом случае плоскостью падения является плоскость xy , плоскостью раздела — плоскость xz и ось y направлена в оптически менее плотную среду.

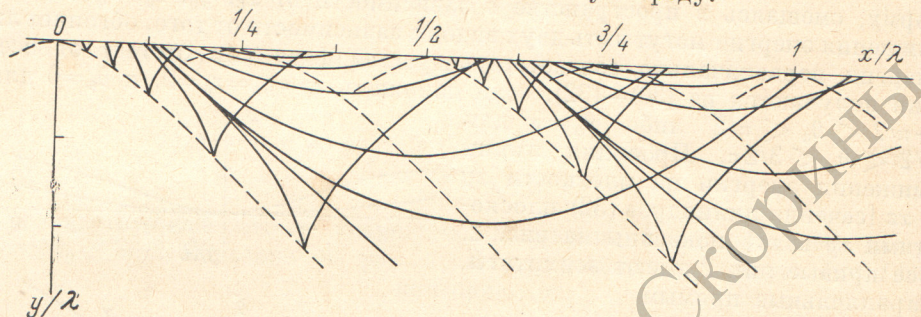


Рис. 3. Кривые движения энергии неоднородной волны в полуплоскости $y > 0$ (полное внутреннее отражение).

$\gamma = 1$, $n_1/n_2 = 1.1$, $x = \pi/2$. Каждая из штрихованных линий является геометрическим местом экстремальных точек кривых движения энергии.

Наряду с траекториями движения энергии можно найти линии тока энергии, т. е. линии, касательные к которым дают направление вектора Умова—Пойнтинга. По определению касательной имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_y}{P_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{P_z}{P_x}. \quad (35)$$

Интегрируя (35) с учетом (7), (14), (15) и положив $y_0 = z_0 = 0$ при $x = x_0$, получаем для любой поляризации

$$y = \frac{\lambda n_2}{4\pi n_1} \ln \frac{\gamma + \cos 2\left(\chi - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}{\gamma + \cos 2\left(\chi - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x_0\right)}, \quad (36)$$

$$z = \frac{\lambda n_2}{2\pi n} \left\{ \text{arc tg} \frac{(\gamma - 1) \text{tg}\left(\chi - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \text{arc tg} \frac{(\gamma - 1) \text{tg}\left(\chi - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x_0\right)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right\}. \quad (37)$$

Впервые линии тока энергии были получены Эйхенвальдом [2, 3] для волны с линейным вектором \mathbf{E} , когда $\gamma = 1$ и отсутствует составляющая потока энергии по оси z , т. е. движение энергии является плоским. Формулы Эйхенвальда непосредственно вытекают из (36), (37) как частный случай.

Рассмотренная выше задача о движении энергии неоднородной волны по существу относится к области механики сплошных сред (см., например, [4], § 8), а задание движения энергии в виде (10), (28) соответствует методу Лангранжа, в то время как задание в виде (35) — методу Эйлера. Отсюда вытекает аналогия между движением энергии и жидкости. Так как в нашем случае поле лучевых скоростей является нестационарным, то линии тока и траектории движения энергии не совпадают [4]. Однако в системе координат, движущейся вместе с фазой, поле лучевых скоростей будет стационарно, а линии тока и траектории движения энергии совпадут.

Литература

- [1] Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
- [2] А. А. Эйхенвальд. ЖРФХО, 41, 131, 1909.
- [3] А. А. Эйхенвальд. Ann. Phys., 35, 1036, 1911; Теоретическая физика, ч. 6. Электромагнитное поле. М.—Л., 1931; Избранные работы. М., 1956.
- [4] Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М., 1970.

Поступило в Редакцию 16 июня 1971 г.