

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л. Н. Марченко, О. В. Якубович

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

Практическое руководство

для студентов специальности 1-31 03 06-01
«Экономическая кибернетика (математические методы
и компьютерное моделирование в экономике)»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 330.43:336.76(076)
ББК 65:053.011я735
М30

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук Н. Г. Лопухова,
кандидат физико-математических наук В. В. Подгорная

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Марченко, Л. Н.

М30 Методы анализа финансовых рынков : практическое
руководство / Л. Н. Марченко, О. В. Якубович ; М-во
образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им.
Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 44 с.
ISBN 978-985-577-361-1

В практическом руководстве излагаются краткие теоретические сведения по дисциплине «Методы анализа финансовых рынков». Рассматриваются вопросы, связанные с оценкой стоимости ценных бумаг на первичном и вторичном рынках.

Издание предназначено для студентов дневной формы обучения специальности 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)».

УДК 330.43:336.76(076)
ББК 65:053.011я735

ISBN 978-985-577-361-1

© Марченко Л. Н., Якубович О. В., 2017
© Учреждение образования «Гомельский
государственный университет
имени Франциска Скорины», 2017

Оглавление

Предисловие	5
1 Общая характеристика финансового рынка	6
1.1 Рынок ценных бумаг и его функции	6
1.2 Первичный и вторичный рынок ценных бумаг	7
1.3 Понятие и виды ценных бумаг	8
1.4 Участники рынка ценных бумаг	9
2 Основы финансовых расчетов	10
2.1 Факторы, учитываемые в финансовых расчетах	10
2.2 Простые и сложные проценты	11
3 Доходность и стоимость первичных ценных бумаг	13
3.1 Понятие доходности ценных бумаг	13
3.2 Стоимость и доходность облигаций	13
3.3 Стоимость и доходность акций	14
3.4 Стоимость и доходность сертификатов	16
3.5 Стоимость и доходность векселей	16
4 Динамика изменения стоимости ценных бумаг в линейных моделях с дискретным временем	17
4.1 Общее описание модели	17
4.2 Биномиальная модель	17
4.3 Гауссовская модель	18
4.4 Модель скользящего среднего $MA(q)$	18
4.5 Модель авторегрессии $AR(p)$	19
5 Прогнозирование в линейных моделях с дискретным временем	20
5.1 Постановка задачи	20
5.2 Алгоритмы построения прогноза	20
6 Динамика изменения цены ценных бумаг в моделях с непрерывным временем	21
6.1 Некоторые сведения из теории случайных процессов	21
6.2 Общее описание модели с непрерывным временем безрискового актива	22
6.3 Модель Самуэльсона	22
7 Портфель ценных бумаг и его характеристики	23
7.1 Определение портфеля ценных бумаг	23
7.2 Характеристики портфеля ценных бумаг	24
8 Оптимальное портфельное инвестирование	24
8.1 Модельные предположения оптимального инвестирования Марковица – Тобина	24
8.2 Эффективное множество портфелей	25

8.3 Портфель Марковица минимального риска	26
8.4 Модель Марковица – Тобина	26
8.5 Модель Марковица – Тобина максимальной доходности	27
9 Производные ценные бумаги	27
9.1 Общая характеристика форвардного контракта.....	27
9.2 Общая характеристика фьючерсного контракта	28
9.3 Общая характеристика опционного контракта	30
9.4 Моделирование прибыли/убытков производных ценных бумаг.....	31
10 Опционные стратегии	34
10.1 Стратегии.....	34
11 Формула Кокса-Росса-Рубинштейна	40
11.1 Одношаговая модель.....	40
11.2 Двухшаговая модель	40
11.3 Многошаговая модель	41
12 Формула Блэка-Шоулса	41
Список использованных источников	43
Приложение А. Порядковые номера дней в году.....	44

Предисловие

Практическое руководство «Методы анализа финансовых рынков» предназначено для студентов дневной формы обучения специальности 1-31 03 06 - 01 «Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)».

Дисциплина специализации «Методы анализа финансовых рынков» посвящена изучению математических моделей изменения цен финансовых активов, инвестиционного портфеля. Изучаемые вероятностные модели являются основой современного финансового анализа и широко применяются в исследованиях при анализе и моделировании процессов рынка ценных бумаг. Пособие отражает теоретические концепции и инструментарий финансового рынка. Дается общая характеристика принципов организации и функционирования рынка ценных бумаг, его участников и основных видов ценных бумаг. Подробно изложены вопросы управления инвестиционным портфелем, основные модели рынка производных финансовых инструментов. В настоящее время рынок производных инструментов уже настолько расширился, что его размеры превышают объемы рынка базовых активов. Поэтому важно при изучении финансового рынка его рассматривать системно: ценные бумаги, инвестиционный портфель, производные финансовые инструменты.

Владение современными методами финансовых вычислений является важной составляющей профессиональной подготовки специалиста в области экономической кибернетики.

Практическое руководство включает теоретический материал по моделированию стоимостей первичных ценных бумаг, портфельного инвестирования и опционов. Он представлен в наглядной и доступной форме, что позволяет студентам быстро освоить основные положения дисциплины. Практическое руководство является основой для подготовки к практическим занятиям, к сдаче зачета и экзамена.

Для более глубокого изучения дисциплины приводится список литературы.

1 Общая характеристика финансового рынка

1.1 Рынок ценных бумаг и его функции

Рыночная экономика представляет собой совокупность различных рынков. Одним из них является финансовый рынок (рисунки 1.1, 1.2; таблицы 1.1–1.3).

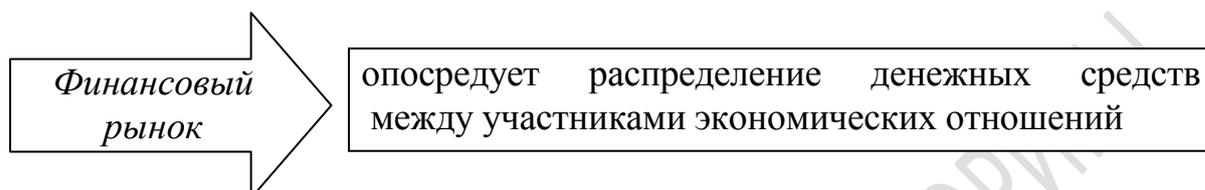


Рисунок 1.1 – Определение финансового рынка

Таблица 1.1 – Структура финансового рынка

Финансовый рынок		
<i>кредитный</i>	<i>фондовый</i>	<i>валютный</i>
Механизм, с помощью которого устанавливаются взаимоотношения между участниками экономических отношений, нуждающимися в финансовых средствах, и теми, кто может их предоставить на определенных условиях	Объединяет часть кредитного рынка и рынок инструментов собственности, охватывает операции по выпуску и обращению инструментов займа, инструментов собственности, производных и гибридных финансовых инструментов	Механизм, с помощью которого устанавливаются правовые и экономические взаимоотношения между продавцами и потребителями валют

Таблица 1.2 – Типы финансовых инструментов фондового рынка

<i>Тип инструментов</i>	<i>Финансовые инструменты</i>
Займа	Векселя, облигации, сертификаты
Собственности	Акции, варранты
Производные	Фьючерсы, форварды, опционы, свопы
Гибридные	Конвертируемые облигации, конвертируемые привилегированные акции

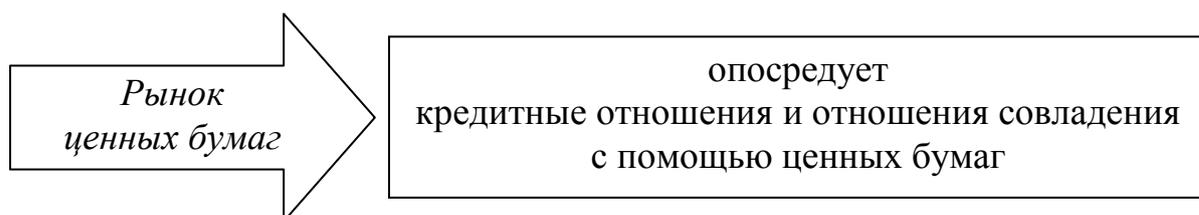


Рисунок 1.2 – Определение рынка ценных бумаг (фондового рынка)

Определение и свойства ценной бумаги

<i>Ценная бумага</i>
законодательно признанное свидетельство права на получение ожидаемых в будущем доходов при конкретных условиях
Свойства:
– свободное обращение на рынке,
– возможность (полностью или частично) вернуть вложенные в производство средства, продав бумаги, не затрагивая и не нарушая сам процесс производства,
– возможность свободной купли-продажи ценных бумаг позволяет вкладчику гибко определять горизонт инвестиций

Лицо, выпускающее ценные бумаги, называется *эмитентом*, а выпуск бумаг – *эмиссией*.

Таблица 1.3 – Функции фондового рынка

<i>Функция</i>	<i>Проявление</i>
Перераспределительная	Мобилизация средств вкладчиков для целей организации и расширения масштабов хозяйственной деятельности
Ценообразующая	Установление курсов ценных бумаг, отражающих реальное экономическое состояние эмитента
Информационная	Сообщение вкладчикам информации об экономической конъюнктуре для ориентации при размещении капиталов
Хеджирующая	Страхование риска финансовых убытков

1.2 Первичный и вторичный рынок ценных бумаг

Характеристика первичного и вторичного рынков

<i>Первичный рынок ценных бумаг</i>
– рынок, на котором происходит первичное размещение ценной бумаги, – в результате продажи бумаг на первичном рынке лицо их выпустившее получает необходимые ему финансовые ресурсы, а бумаги поступают в руки первоначальных держателей, – функция первичного рынка состоит в мобилизации новых капиталов.
<i>Вторичный рынок ценных бумаг</i>
– рынок, на котором происходит обращение ценных бумаг, – не происходит аккумуляции новых финансовых средств, – функция вторичного рынка состоит в перераспределении ресурсов среди инвесторов.

Характеристика биржевого и внебиржевого рынков

<i>Биржевой рынок ценных бумаг:</i>
– организованный рынок ценных бумаг, – определены место, время, правила торговли, – листинг, то есть процедура включения ценной бумаги эмитента в котировальный список биржи.
<i>Внебиржевой рынок ценных бумаг:</i>
– исторически возник раньше биржевого, – обращение ценных бумаг финансово «слабых» компаний, – отсутствием единого курса у одинаковых ценных бумаг.

Биржевой и внебиржевой рынки взаимосвязаны (рисунок 1.3).

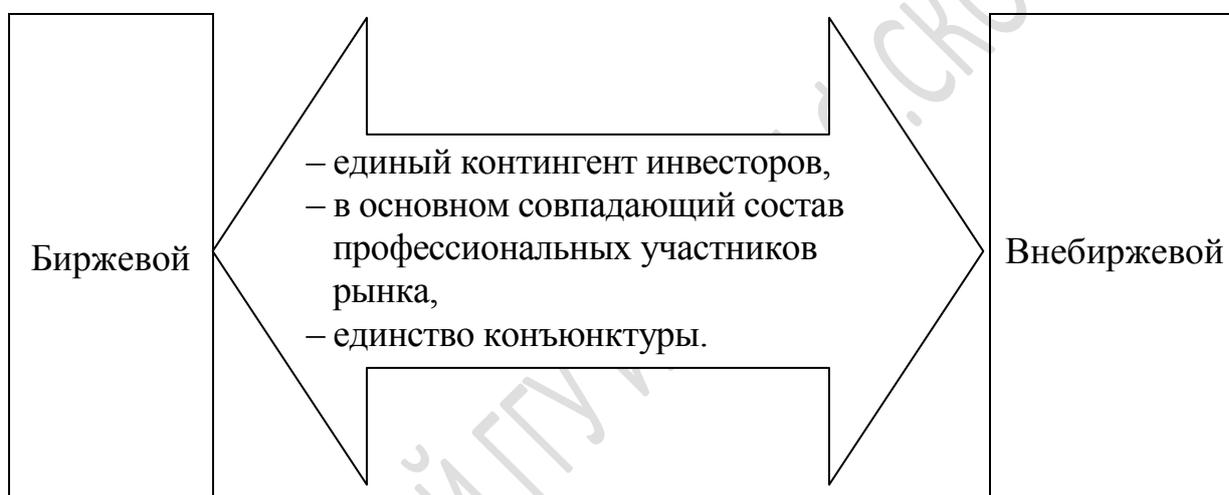


Рисунок 1.3 – Взаимосвязь биржевого и внебиржевого рынков

1.3 Понятие и виды ценных бумаг

Фондовые рынки представлены разнообразием ценных бумаг, которые разделены на две большие группы (таблицы 1.4–1.6).

Таблица 1.4 – Виды ценных бумаг

Ценные бумаги	
<i>первичные</i>	<i>производные (деривативы)</i>
– депозитные сертификаты, – векселя, – облигации, – акции.	– фьючерсы, – опционы, – свопы.

Таблица 1.5 – Характеристика первичных ценных бумаг

<i>Ценные бумаги</i>	<i>Характеристика</i>
Депозитный сертификат	Письменное свидетельство эмитента о вкладе на его имя денежных средств, удостоверяющее право владельца бумаги на получение по истечении оговоренного срока суммы вклада и начисленных процентов
Вексель	Долговая ценная бумага, не имеющее специального обеспечения обязательство лица (физического или юридического) выплатить в определенный срок определенную сумму денег, может обслуживать финансовые операции (отношения займа), коммерческие сделки, и выступать в качестве средства платежа
Облигация	Долговая ценная бумага, выпускаемая государством или акционерными обществами, частными предприятиями с целью аккумулирования капитала
Акция	Эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом и на часть имущества, остающегося после его ликвидации

Таблица 1.6 – Характеристика вторичных ценных бумаг

<i>Деривативы</i>	<i>Характеристика</i>
Фьючерс	Соглашение о покупке или продаже актива в определенное время в будущем по определенной цене
Опцион	Соглашение между двумя инвесторами, один из которых продает (выписывает) опцион, а другой покупает его и приобретает право (но не обязанность) в течение оговоренного в условиях опциона срока либо купить, либо продать по фиксированной цене определенное количество или значение конкретного актива
Своп	Соглашение между двумя инвесторами об обмене в будущем платежами в соответствии с определенными условиями

1.4 Участники рынка ценных бумаг

Рынок ценных бумаг создает возможности для объединения заемщиков и инвесторов. Заемщики могут заимствовать средства из большого разнообразия источников, а инвесторы получают широкий перечень инвестиционных инструментов (рисунки 1.4, 1.5).



Рисунок 1.4 – Участники фондового рынка

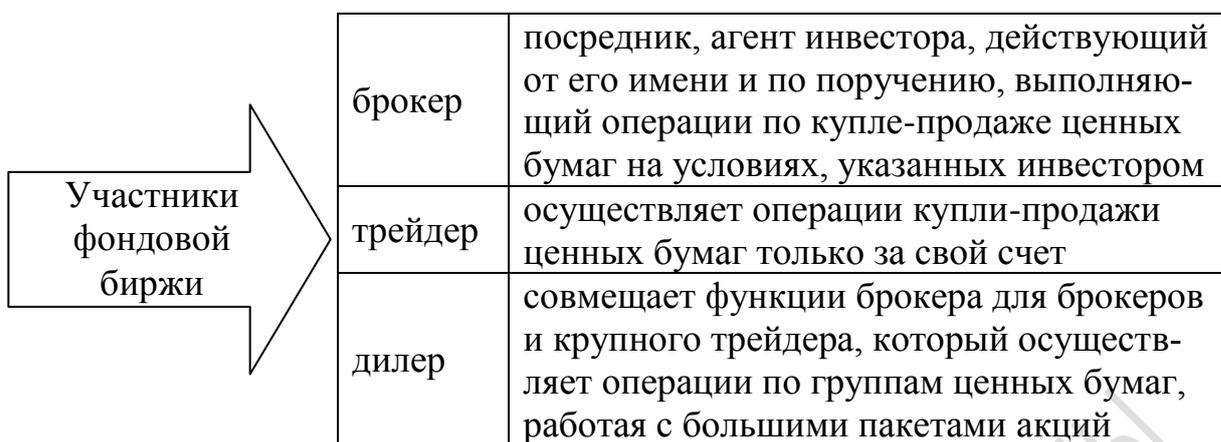


Рисунок 1.5 – Участники фондовой биржи

2 Основы финансовых расчетов

2.1 Факторы, учитываемые в финансовых расчетах

Финансовые процессы определяются факторами, которые условно называются внутренними и внешними (таблица 2.1, рисунок 2.1).

Таблица 2.1 – Факторы, влияющие на финансовые процессы

<i>Факторы</i>	<i>Проявление</i>
Внутренние	Основные, существенные и непосредственные характеристики финансового процесса
Внешние	– инфляционные ожидания, – конкуренция на рынке финансовых ресурсов, – фактор риска, – фактор времени

«Золотое» правило финансиста:
Деньги в разное время – это разные деньги

Рисунок 2.1 – Фактор времени

Фактор времени в финансовой операции учитывается с помощью процентной ставки (ставка доходности за период):

$$r = I / PV,$$

где I – полученная прибыль за период;
 PV – вложенные средства.

При анализе результатов финансовых операций в зависимости от движения по временной оси различают наращение и дисконтирование (рисунок 2.2).

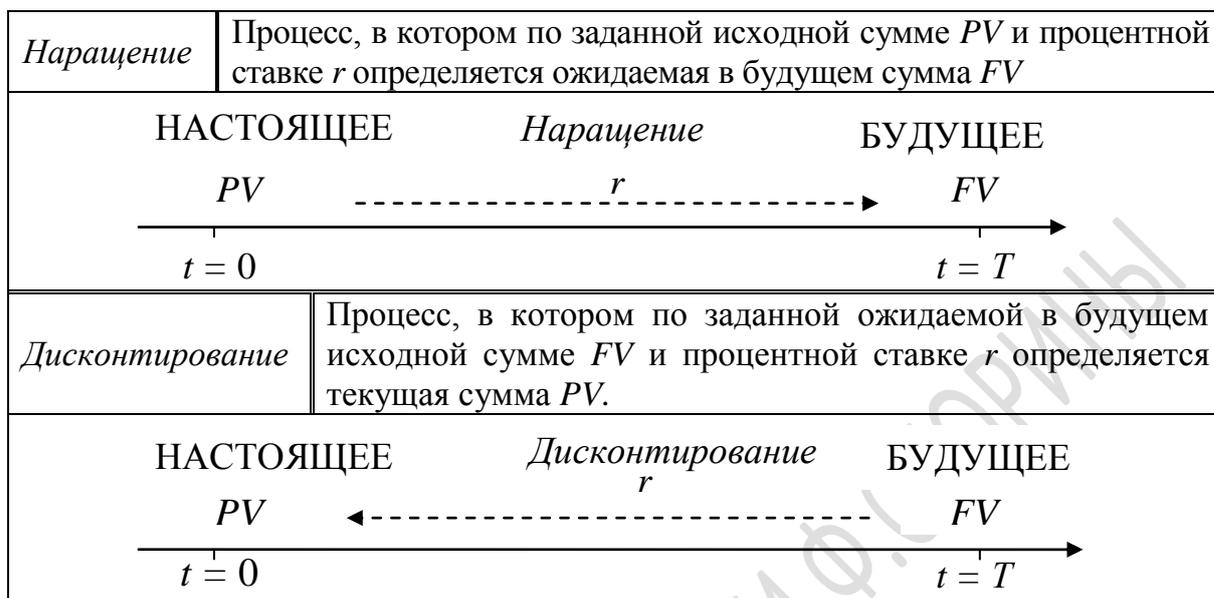


Рисунок 2.2 – Определение наращенной и дисконтированной

2.2 Простые и сложные проценты

В зависимости от базы начисления процентов в текущем периоде, различают простые и сложные (таблицы 2.2–2.5).

Таблица 2.2 – Характеристика простых и сложных процентов

<i>Проценты</i>	<i>Характеристика</i>
Простые	Базой для начисления процентов в каждом периоде является исходная сумма
Сложные	Базой для начисления процентов в текущем периоде является сумма, полученная в предыдущем периоде

Таблица 2.3 – Практики расчетов срока финансовой операции

<i>Практики расчетов</i>	<i>Описание</i>
Обыкновенные проценты с приближенным числом дней (360/360)	Число дней финансовой операции t : 30 дней, если месяц полный, по факту, если месяц неполный; временная база: $B = 360$
Банковский метод (365/360)	Число дней финансовой операции: t по факту; временная база: $B = 360$
Точные проценты (365/365)	Число дней финансовой операции: t по факту; временная база: $B = 365$ (366)

Таблица 2.4 – Расчет простых процентов

Операция	Простые проценты	
	<i>n</i> лет	<i>t</i> дней
Наращение, <i>r</i> – годовая процентная ставка	$FV = PV(1 + rn)$	$FV = PV(1 + rt/B)$
Дисконтирование математическое, <i>r</i> – годовая процентная ставка	$PV = FV(1 + rn)^{-1}$	$PV = FV(1 + rt/B)^{-1}$
Дисконтирование (банковский учет), <i>d</i> – годовая учетная ставка	$PV = FV(1 - dn)$	$PV = FV(1 - dt/B)$

Простые проценты обычно используются в краткосрочных финансовых операциях, срок проведения которых меньше года.

При определении продолжительности финансовой операции начало и конец финансовой операции считаются за один день.

Таблица 2.5 – Расчет сложных процентов

Операция	Начисление сложных процентов, <i>n</i> лет	
	1 раз в год	<i>m</i> раз в год, <i>m</i> > 1
Наращение, <i>r</i> – годовая процентная ставка	$FV = PV(1 + r)^n$	$FV = PV(1 + r/m)^{nm}$
Дисконтирование математическое, <i>r</i> – годовая процентная ставка	$PV = FV(1 + r)^{-n}$	$PV = FV(1 + r/m)^{-nm}$
Дисконтирование (банковский учет), <i>d</i> – годовая учетная ставка	$PV = FV(1 - d)^n$	$PV = FV(1 - d/m)^{nm}$

Сложные проценты чаще всего используются в среднесрочных и долгосрочных финансовых операциях, срок проведения которых больше года.

При бесконечно частом дроблении года на малые процентные периоды, то есть при $m \rightarrow \infty$ имеет место непрерывное начисление процентов по ставке *r* (таблица 2.6).

Таблица 2.6 – Расчет при непрерывном начислении процентов

Операция	Непрерывное начисление процентов
Наращение	$FV = PVe^{rm}$
Дисконтирование	$PV = FVe^{-rm}$

Как правило, в финансовых контрактах обязательно фиксируются все параметры финансовой операции. В случае, когда один из параметров неизвестен, его можно найти из соответствующего соотношения.

3 Доходность и стоимость первичных ценных бумаг

3.1 Понятие доходности ценных бумаг

Будем считать:

1) все параметры финансовых операций считаются известными в момент их совершения;

2) стоимость и доходность финансовых активов являются детерминированными.

При расчете текущей стоимости актива учитываются будущие доходы, которые получит инвестор (рисунок 3.1).

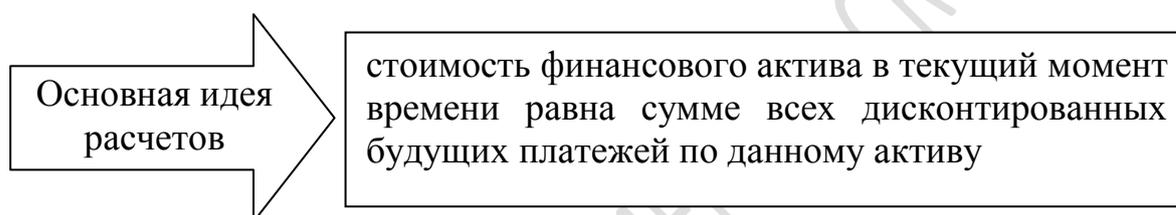


Рисунок 3.1 – Основной принцип расчета стоимости актива

Эффективность финансовой операции за период T измеряется ставкой доходности (доходностью)

$$r_T = \frac{S_T + D_T - S_0}{S_0},$$

которая характеризует относительное изменение капитала инвестора за период T . Здесь S_0 – стоимость ценной бумаги в момент покупки ($t = 0$), S_T – стоимость ценной бумаги в момент T , D_T – суммарный доход от актива за период владения. Если $T = 1$ год, то доходность обозначается r .

3.2 Стоимость и доходность облигаций

Параметры облигации:

N – номинал облигации;

C – величина купона;

n – число лет до погашения облигации;

r – доходность до погашения облигации (доходность к погашению);

m – количество начислений процентов и купонных выплат в году.

При расчете текущей стоимости облигации учитываются ее будущие доходы (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Текущая стоимость облигации

<i>Вид облигации</i>	<i>Стоимость</i>
$m = 1$	$S_0 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+N}{(1+r)^n}$
$m > 1$	$S_0 = \frac{C/m}{1+r/m} + \frac{C/m}{(1+r/m)^2} + \dots + \frac{C/m+N}{(1+r/m)^{nm}}$
$C = 0$	$S_0 = \frac{N}{(1+r)^n}$

Доходность облигации (таблица 3.2) определяется из равенства для текущей стоимости.

Таблица 3.2 – Доходность облигации

<i>Доходность</i>	<i>Расчет</i>
Текущая доходность	$r_{\text{тек}} = \frac{C}{S_0}$
Доходность бескупонной облигации	$r = \sqrt[n]{\frac{N}{S_0}} - 1$
Ориентировочная доходность	$\hat{r} = \frac{N + nC - S_0}{n(N + S_0)/2}$

3.3 Стоимость и доходность акций

Параметры акции:

D_t – величина дивиденда в момент времени t , $t = 1, 2, \dots$;

r – доходность акции.

При расчете текущей стоимости акции учитываются ее будущие доходы (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Стоимость акции

<i>Условия</i>	<i>Стоимость</i>
Бессрочное владение	$S_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n}{(1+r)^n} + \dots$
Срок владения, n	$S_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n}{(1+r)^n} + \frac{S_n}{(1+r)^n}$
$D_t = D, t = 1, 2, \dots$	$S_0 = \frac{D}{r}$

Доходность акции (таблица 3.4) определяется из равенства для текущей стоимости.

Таблица 3.4 – Доходность акции

<i>Доходность</i>	<i>Расчет</i>
Доходность при $D_t = D, t = 1, 2, \dots$	$r = \frac{D}{S_0}$
Ориентировочная доходность	$\hat{r} = \frac{S_n + (D_1 + D_2 + \dots + D_n) - S_0}{n(S_n + S_0)/2}$

При оценке акций основным является вопрос определения величины дивидендов (таблица 3.5).

Параметры дивидендов:

D_t – величина дивиденда в момент времени $t, t = 0, 1, 2, \dots$;

g – темп прироста дивиденда;

r – доходность акции.

Таблица 3.5 – Модели изменения дивидендов

<i>Модель</i>	<i>Расчет</i>
Модель Гордона, $r > g$	$S_0 = \frac{D_0 \cdot (1+r)}{r-g},$ $D_t = D_0(1+g)^t$
Модель переменного роста, $r > g$	$S_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{D_k(1+g)}{r-g} \cdot \frac{1}{(1+r)^k},$ $D_t = D_k(1+g)^{t-k}, t = k+1, k+2, \dots$

3.4 Стоимость и доходность сертификатов

Параметры сертификата:

N – номинал;

t – срок, дней;

B – временная база;

g – процентная ставка;

r – доходность.

Оценка сертификатов основывается на схеме простых процентов (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Параметры и характеристики депозитных сертификатов

<i>Показатель</i>	<i>Расчёт</i>
Абсолютный доход	$I = Ngt/B$
Сумма к погашению	$S = N + I$
Цена за $t_1 > t$ дней до погашения	$S_1 = \frac{S}{1 + rt_1 / B}$
Доходность	$r = \frac{S / S_1 - 1}{t_1 / B}$

3.5 Стоимость и доходность векселей

Параметры векселя:

N – номинал;

t – срок, дней;

d – учетная ставка;

r – доходность при временной базе B .

Оценка векселей сроком до одного года основывается на схеме простых процентов (таблица 3.7).

Таблица 3.7 – Параметры, стоимость и доходность векселей

<i>Показатель</i>	<i>Расчет</i>
Дисконт	$D = Nd t/360$
Цена за t дней до погашения	$S_0 = N - D$
Доходность	$r = \frac{d B}{360 - d t}$

4 Динамика изменения стоимости ценных бумаг в линейных моделях с дискретным временем

4.1 Общее описание модели

Пусть:

1) время меняется дискретно: $n = 0, 1, 2, \dots$;

2) S_n – стоимость (цена) ценной бумаги в момент времени n ;

3) $\rho_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$ – относительное изменение цены, представляющее

случайную последовательность;

4) $\prod_{i=1}^n (1 + \rho_i) = e^{\sum_{i=1}^n h_i}$ – стохастическая экспонента, где $h_i = \ln(1 + \rho_i)$

или $h_i = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$

Величины h_i называются логарифмической доходностью.

Общая модель стоимости ценной бумаги с дискретным временем имеет вид

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n (1 + \rho_i) \text{ или } S_n = S_0 e^{\sum_{i=1}^n h_i}.$$

4.2 Биномиальная модель

Моделируется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ρ_n (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Характеристики биномиальной модели

Параметры	Значения
Распределение ρ_n	$P\{ \rho_n = b \} = p,$ $P\{ \rho_n = a \} = 1 - p,$ $-1 < a < b$
Среднее значение цены S_n	$MS_n = S_0(1 + a(1 - p) + bp)^n$
Дисперсия цены S_n	$DS_n = S_0^2((1 + a)^2(1 - p) + (1 + b)^2p)^n - (MS_n)^2$

4.3 Гауссовская модель

Моделируется последовательность случайных величин

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n,$$

где (ε_n) – последовательность независимых случайных величин;

$$\varepsilon_n \sim N(0,1);$$

$(\mu_n), (\sigma_n)$ – параметры модели, неслучайные последовательности.

Оценки параметров модели по выборке h_1, h_2, \dots, h_T находятся методом наименьших квадратов. В таблице 4.2 представлены частные случаи оценок.

Таблица 4.2 – Оценки параметров гауссовской модели

Частный случай	Оценки параметров модели
$\mu_n = \mu, \sigma_n = \sigma$	$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_i, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (h_i - \hat{\mu})^2$
$\mu_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k$ $\sigma_n = \sigma$	Оценки $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ есть решение задачи $\sum_{i=1}^T (h_i - a_0 - a_1 i - \dots - a_k i^k)^2 \rightarrow \min_{a_1, a_2, \dots, a_k},$ Оценка $\hat{\sigma}^2$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-k-1} \sum_{i=1}^T (h_i - a_0 - a_1 i - \dots - a_k i^k)^2$

4.4 Модель скользящего среднего MA(q)

Моделируется последовательность случайных величин

$$h_n = \mu + b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q},$$

$$h_n \sim N(\mu, b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_q^2),$$

где (ε_n) – последовательность независимых случайных величин;

$$\varepsilon_n \sim N(0,1);$$

$\mu, b_0, b_1, \dots, b_q$ – параметры модели.

Оценки параметров модели по выборке h_1, h_2, \dots, h_T находятся методом моментов. В таблице 4.3 представлены оценки модели.

Таблица 4.3 – Оценки параметров модели скользящего среднего

Параметр	Оценка
$\hat{\mu}$	$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T h_i$
$\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k$	<p>Решение системы уравнений</p> $\hat{R}_k = \sum_{s=0}^{q-k} \hat{b}_s \hat{b}_{s+k}, k = 0, \dots, q,$ <p>где $\hat{R}_k = \frac{1}{T-k-1} \sum_{i=1}^{T-k} (h_i - \hat{\mu})(h_{i+k} - \hat{\mu})$</p>

4.5 Модель авторегрессии AR(p)

Моделируется последовательность случайных величин

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n,$$

где (ε_n) – последовательность независимых случайных величин;

$$\varepsilon_n \sim N(0,1);$$

$a_0, a_1, \dots, a_p, \sigma$ – параметры модели.

При $p = 1$ характеристики модели:

$$Mh_n = \frac{a_0}{1-a_1}, Dh_n = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}.$$

В таблице 4.4 представлены оценки параметров модели по выборке h_1, h_2, \dots, h_T .

Таблица 4.4 – Оценки параметров авторегрессионной модели

Параметры	Оценка
$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$	<p>Решение задачи:</p> $\sum_{i=p+1}^T (h_i - a_0 - a_1 h_{i-1} - \dots - a_k h_{i-p})^2 \rightarrow \min_{a_1, a_2, \dots, a_k}$
$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-(2p+1)} \sum_{i=p+1}^T (h_i - a_0 - a_1 h_{i-1} - \dots - a_k h_{i-p})^2$

5 Прогнозирование в линейных моделях с дискретным временем

5.1 Постановка задачи

Линейная модель с дискретным временем в общем виде запишется как

$$h_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где h_n – логарифмическая доходность цены, $n = 1, 2, \dots$;

$\varepsilon_k \sim N(0, 1)$ – независимые случайные величины;

μ, α_k, \dots – параметры модели, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть значения логарифмической доходности цены h_n заданы до настоящего момента времени $t = 0$:

$$\{\dots, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0\}.$$

Прогноз \hat{h}_n называется наилучшим в среднеквадратическом, если

$$\sum_n (\hat{h}_n - h_n)^2 \rightarrow \min_{\hat{h}_n}.$$

5.2 Алгоритмы построения прогноза

Алгоритм 1

Шаг 1. Решение системы

$$\begin{cases} \alpha_0 \beta_0 = 1, \\ \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 = 0, \\ \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

относительно $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\}$ по известным параметрам $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ модели с дискретным временем при условии $\alpha_0 \neq 0$.

Шаг 2. Определение коэффициентов прогноза $c_{n,k}$:

$$c_{n,k} = \sum_{s=0}^k \alpha_{n+k-s} \beta_s.$$

Шаг 3. Вычисление прогноза \hat{h}_n :

$$\hat{h}_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} (h_{-k} - \mu).$$

Алгоритм 2

Шаг 1. Определение функций:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, A_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Шаг 2. Определение функции $C_n(z)$:

$$C_n(z) = z^{-n} \frac{A_n(z)}{A(z)}.$$

Шаг 3. Определение коэффициентов разложения $C_n(z)$ по степеням z :

$$C_n(z) = c_{n,0} + c_{n,1} z + c_{n,2} z^2 + \dots$$

Шаг 4. Вычисление прогноза \hat{h}_n :

$$\hat{h}_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} (h_{-k} - \mu).$$

6 Динамика изменения цены ценных бумаг в моделях с непрерывным временем

6.1 Некоторые сведения из теории случайных процессов

Винеровским процессом $w(t)$, где $t \in [0; \infty)$, называется случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

- 1) $w(0) = 0$;
- 2) $w(t)$ – процесс с независимыми приращениями;
- 3) $w(t) - w(s)$ имеет нормальное распределение $N(0, |t - s|)$.

Случайный процесс $x(t)$ называется диффузионным, если он удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t) = a(t, x(t)) dt + b(t, x(t)) dw(t),$$

где $a(t, x(t))$ – коэффициент сноса;

$b(t, x(t))$ – коэффициент диффузии или волатильность.

Пусть $y(t) = f(t, x(t))$, где f – непрерывная функция, имеющая непрерывные производные f_x', f_t', f_{xx}'' , тогда справедлива формула Ито:

$$dy(t) = f_t' dt + f_x' dx + \frac{1}{2} b^2(t, x(t)) f_{xx}'' dt.$$

6.2 Общее описание модели с непрерывным временем безрискового актива

Пусть:

- 1) время меняется непрерывно: $t \in [0, \infty)$;
- 2) $B(t)$ – стоимость (цена) ценной бумаги в момент времени t ;
- 3) $r(t) = \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)}$ – относительное изменение цены;

4) при $\Delta t \rightarrow 0$ стоимость $B(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

общее решение которого

$$B(t) = B(0) e^{\int_0^t r(s) ds}$$

является моделью цены безрискового актива.

При $r(t) = r = \text{const}$ модель цены безрискового актива имеет вид

$$B(t) = B(0) \cdot e^{rt}.$$

6.3 Модель Самуэльсона

Пусть:

- 1) время меняется непрерывно: $t \in [0, \infty)$;
- 2) $S(t)$ – стоимость рискованной ценной бумаги в момент времени t ;
- 3) $S(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t) \cdot (\mu dt + \sigma dw(t)),$$

где μ – тренд;

σ – волатильность стоимости ценной бумаги;

4) $H(t) = \ln S(t) - \ln S(0)$ (или $S(t) = S(0)e^{H(t)}$) удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dH(t) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dw(t)$$

с начальным условием $H(0) = 0$, общее решение которого

$$H(t) = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t).$$

Тогда

$$S(t) = S(0)\exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t)).$$

Здесь $H(t)$ имеет нормальное распределение, а $S(t)$ имеет логарифмически нормальное распределение.

Модель Самуэльсона имеет следующие обобщения:

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dw(t)),$$

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t, S(t))dw(t)).$$

7 Портфель ценных бумаг и его характеристики

7.1 Определение портфеля ценных бумаг

Портфелем ценных бумаг называется совокупность ценных бумаг, принадлежащих инвестору.

Этапы формирования портфеля ценных бумаг:

1) выбор инвестиционной политики: определяются цели инвестирования, потенциальные объекты, объем и сроки инвестирования;

2) анализ рынка ценных бумаг: оценка реальной стоимости и тенденций изменения курсов активов;

3) моделирование динамики курсов активов: используются эконометрические модели цен и доходностей активов;

4) определение структуры портфеля: устанавливаются пропорции распределения инвестируемого капитала между активами в соответствии с выбранной инвестиционной политикой;

5) оценка эффективности и корректировка портфеля в соответствии с выбранным критерием.

Пусть портфель формируется на множестве из N ($N > 1$) различных ценных бумаг: S_i – стоимость ценной бумаги i -го типа, n_i – количество бумаг i -го типа в портфеле, $W_0 = \sum_{i=1}^N n_i S_i$ – инвестируемая сумма. Тогда $x_i = n_i S_i / W_0$ – доля капитала, потраченная на приобретение ценных бумаг i -го типа, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^N x_i = 1$.

Совокупность величин $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ определяет структуру портфеля ценных бумаг.

Если:

а) $x_i > 0$, то x_i – доля капитала, вложенная в бумагу i -го типа;

б) $x_i = 0$, то бумага i -го типа отсутствует в портфеле;

в) $x_i < 0$, то относительно бумаги i -го типа совершена операция короткая продажа: средства, полученные за счет данной операции, использованы им для покупки других ценных бумаг.

7.2 Характеристики портфеля ценных бумаг

Доходность портфеля

$$r_p = \sum_{i=1}^N x_i r_i,$$

где r_i – доходность ценной бумаги i -го типа.

Математическое ожидание случайной величины r_p

$$M(r_p) = E_p = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i$$

называется ожидаемой доходностью портфеля.

Дисперсия случайной величины r_p

$$D(r_p) = V_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j c_{ij}$$

называется дисперсией доходности портфеля.

Риском портфеля называется среднее квадратическое отклонение случайной величины r_p ценной бумаги i -го типа

$$\sigma_p = \sqrt{V_p}.$$

Здесь $\mu_i = M(r_i)$ – ожидаемая доходность ценной бумаги i -го типа, $c_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j)$ – ковариация доходностей.

8 Оптимальное портфельное инвестирование

8.1 Модельные предположения оптимального инвестирования Марковица – Тобина

Предположения (П) относительно рынка и поведения его участников:

П1 – инвесторы осуществляют оценку портфелей, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов;

П2 – при выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор отдает предпочтение портфелю с большей ожидаемой доходностью;

П3 – при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей инвестор отдает предпочтение портфелю с меньшим риском;

П4 – характеристики активов и портфелей относятся к одному заданному периоду владения;

П5 – активы являются бесконечно делимыми, то есть в каждый актив может быть вложена любая доля капитала инвестора;

П6 – отсутствуют технические препятствия в реализации оптимальных инвестиционных стратегий; относительно любого актива возможна операция «короткая продажа»; налоги и издержки, связанные с покупкой и продажей активов, не принимаются во внимание.

8.2 Эффективное множество портфелей

Инвестор, формируя портфель x стремится к уменьшению его риска. Обычно, чем выше ожидаемая доходность, тем выше и риск. Поэтому инвестору требуется сделать выбор соотношения риска σ_p и ожидаемой доходности E_p , то есть принимать решение в смысле подхода «доходность – риск».

Задача выбора портфеля x из класса допустимых портфелей X формулируется в зависимости от критерия оптимальности.

Портфель x^* , являющийся решением задачи оптимизации, которая отражает индивидуальные предпочтения инвестора относительно ожидаемой доходности и риска, на котором он действует, называется *эффективным портфелем*.

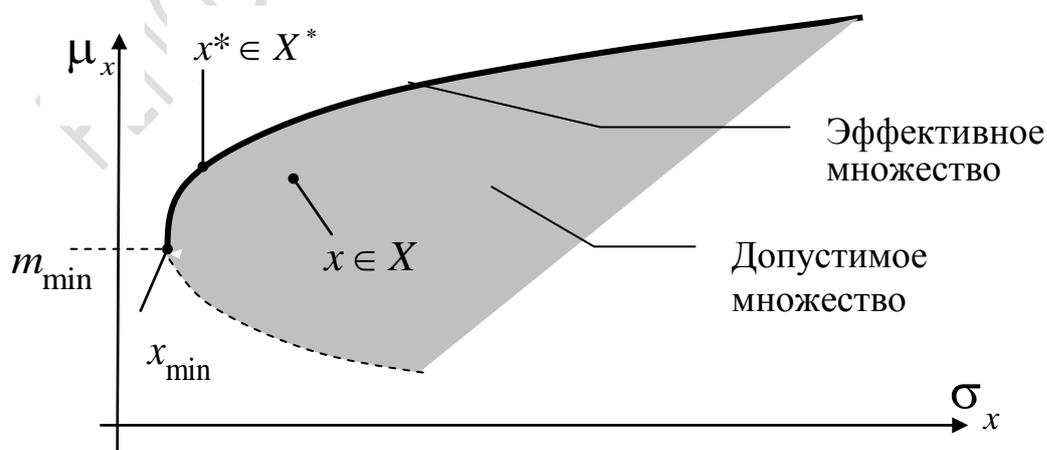


Рисунок 8.1 – Допустимое и эффективное множества портфелей

Множество X^* портфелей, каждый из которых удовлетворяет предположениям П2 и П3, называется *эффективным множеством* (рисунок 8.1).

8.3 Портфель Марковица минимального риска

Эффективная диверсификация по Марковицу предусматривает такое объединение ценных бумаг в портфель, которое обеспечивает наименьший уровень риска.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – портфель ценных бумаг;

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ – вектор ожидаемых доходностей бумаг;

$C = [c_{ij}] = [\text{cov}(r_i, r_j)]$, $i, j = 1, \dots, N$, – ковариационная матрица доходностей;

$E_p = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i = x \cdot \mu^T$ – ожидаемая доходность портфеля;

$V_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j c_{ij} = x \cdot C \cdot x^T$ – дисперсия доходности портфеля.

Задача Марковица формулируется как задача определения оптимального при заданном уровне доходности E в смысле подхода «доходность – риск» портфеля ценных бумаг, математическая модель которой имеет вид

$$V_p \rightarrow \min,$$

$$E_p = E,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

8.4 Модель Марковица – Тобина

Комбинированный портфель включает как рисковые, так и безрисковые ценные бумаги.

Пусть x_0 – доля безрисковых вложений с гарантированной эффективностью μ_0 . Оптимизационная задача Марковица – Тобина выбора оптимальной структуры комбинированного портфеля, состоящего из безрискового актива и N рискованных активов, имеет вид

$$V_p \rightarrow \min,$$

$$E_p + \mu_0 \cdot x_0 = E,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i + x_0 = 1.$$

8.5 Модель Марковица – Тобина максимальной доходности

Задача оптимального выбора портфеля максимальной доходности с заданным уровнем риском V имеет вид

$$E_p \rightarrow \max,$$

$$V_p = V,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Замечание. Приведенные модели являются классическими в портфельной теории и допускают различные модификации.

9 Производные ценные бумаги

Производной ценной бумагой (derivative), производным финансовым инструментом, *деривативом* называется финансовый документ, стоимость которого зависит (то есть является производной величиной) от стоимости других, базовых переменных. Как правило, этими переменными выступают цены разнообразных рыночных активов. Например, фондовый опцион или опцион на акции (stock option) является производной ценной бумагой, стоимость которой зависит от цены акции.

Сразу скажем, что с этими бумагами имеют дело два типа людей: во-первых, это хеджеры, то есть люди, стремящиеся уменьшить, «схеджировать» риск от финансовых операций; во-вторых, это спекулянты, стремящиеся нажиться на колебаниях цен.

Основные типы производных ценных бумаг представлены форвардными, фьючерсными и опционными контрактами.

9.1 Общая характеристика форвардного контракта

Форвардный контракт (forward contract) представляет собой соглашение о покупке или продаже того или иного актива в определенный момент времени в будущем по определенной цене. Данная бумага есть чрезвычайно простая производная ценная бумага. Форвардный контракт является предметом торговли на внебиржевом рынке.

Как правило, он заключается между двумя финансовыми организациями или финансовой организацией и одним из ее клиентов.

Форвардный контракт – это договор между покупателем и продавцом (рисунок 9.1), со следующими обязательствами:

– продавец обязуется в некоторый момент времени T в будущем предоставить покупателю определенное количество товара определенного качества по заранее оговоренной (форвардной) цене;

– покупатель обязуется купить этот товар по этой заранее оговоренной цене.

Обычно покупатель платит некоторую сумму в момент заключения контракта (аванс) и оставшуюся часть суммы – в момент поставки товара покупателем.

Форвардный контракт заключается, как правило, в целях осуществления реальной продажи или покупки соответствующего актива, в том числе в целях страхования поставщика или покупателя от возможного неблагоприятного изменения цены.



Рисунок 9.1 – Схема форвардного контракта

В договоре обычно предусматриваются санкции за невыполнение условий контракта, однако это помогает мало: пока состоится суд и будет выполнено решение – инфляция обесценит все штрафные санкции. Поэтому форвардные контракты заключаются с солидными фирмами, где вероятность нарушения обязательств мала.

В момент заключения форвардного контракта стороны согласовывают цену, по которой сделка будет исполнена, то есть цену поставки. Она остается неизменной в течение всего времени действия форвардного контракта.

9.2 Общая характеристика фьючерсного контракта

Фьючерсный контракт – это соглашение о покупке или продаже актива в определенное время в будущем по определенной цене.

В отличие от форвардных контрактов, фьючерсные контракты, как правило, заключаются на биржах. Для этого контракты подвергаются стандартизации. Поскольку обе стороны контракта могут не знать друг друга, биржи предоставляют гарантии, что фьючерсный контракт будет выполнен (рисунок 9.2).

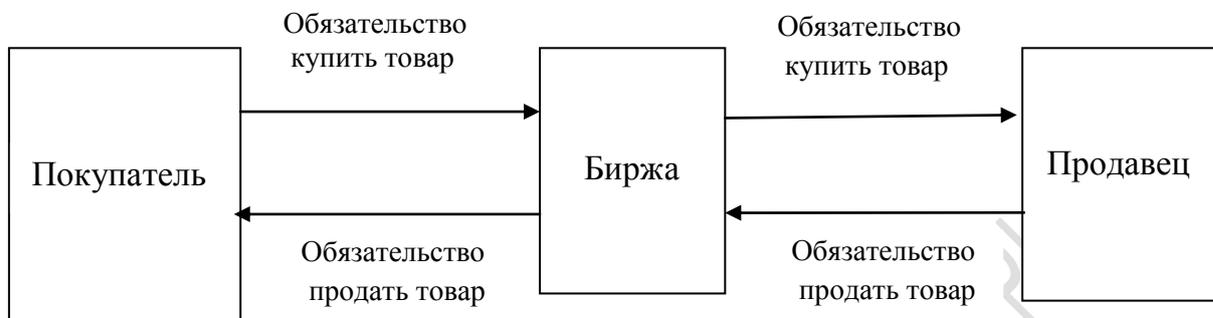


Рисунок 9.2 – Схема фьючерсного контракта

Появление такого солидного посредника, как биржа, резко уменьшает риск невыполнения фьючерсного контракта, хотя минимальный риск всё-таки остаётся.

Из-за наличия посредника в лице биржи фьючерсы приобретают некоторые дополнительные черты:

а) фьючерсы стандартизованы по количеству товара, по его характеристикам, по срокам поставки и т. д.;

б) при фьючерсах покупатель и продавец не встречаются и даже вообще не знают друг друга, так как они имеют дело с биржей;

в) чтобы уменьшить риск невыполнения контракта, биржа берёт и с покупателя, и с продавца некоторую сумму денег в залог, которая называется маржей (margin). Обычно эта маржа составляет от 5 до 15 % от суммы контракта. При выполнении контракта маржа возвращается, при невыполнении – идёт на счёт биржи.

Инвестор уверен, что всегда сможет купить или продать фьючерсный контракт. Отмеченный момент дает преимущество владельцу фьючерсного контракта по сравнению с держателем форвардного контракта. В то же время стандартный характер условий контракта может оказаться неудобным для контрагентов. Например, им требуется поставка некоторого товара в ином количестве, в ином месте и в другое время, чем это предусмотрено фьючерсным контрактом на данный товар. Кроме того, на бирже может вообще отсутствовать фьючерсный контракт на актив, в котором заинтересованы контрагенты. В связи с этим заключение фьючерсных сделок, как правило, имеет своей целью не реальную поставку/приемку актива, а хеджирование

позиций контрагентов или игру на разнице цен. Только 2–5 % контрактов в мировой практике заканчивается реальной поставкой соответствующих активов.

Фьючерсная цена – это цена, которая фиксируется при заключении фьючерсного контракта. Она отражает ожидания инвесторов относительно будущей спот-цены для соответствующего актива. При заключении фьючерсного контракта фьючерсная цена может лежать выше или ниже цены спот для данного актива.

Ситуация, когда фьючерсная цена выше цены спот, называется *контанго*. Ситуация, когда фьючерсная цена ниже цены спот, называется *бэкуордейшн*.

Если для нескольких фьючерсных контрактов, имеющих различные даты истечения, фьючерсная цена ближайшего контракта меньше фьючерсной цены более отдаленного контракта, то такая ситуация называется нормальным контанго. Если, напротив, фьючерсная цена первого контракта выше фьючерсной цены более отдаленного контракта, то это нормальное бэкуордейшн.

9.3 Общая характеристика опционного контракта

Опцион представляет собой контракт, заключаемый между двумя инвесторами, один из которых продает (выписывает) опцион, а другой покупает его и приобретает тем самым право (но не обязанность) в течение оговоренного в условиях опциона срока либо купить, либо продать по фиксированной цене определенное количество или значение конкретного базисного актива.

Дата, в которую право на покупку может быть реализовано, называется датой истечения срока опциона. После этой даты право на покупку утрачивается.

Цена, по которой покупатель имеет право купить акции, называется ценой исполнения.

За приобретение права купить акции приходится платить, и эта плата за приобретение опциона называется ценой опциона или премией.

Главным отличием опциона от фьючерса является то, что фьючерс обязателен к исполнению, а покупатель опциона покупает право, но не обязанность совершить некоторую финансовую операцию. Обязанность сохраняется лишь за продавцом опциона.

Существует два вида опционов:

а) опцион *call* (опцион на покупку), который дает право держателю опциона купить актив;

б) опцион *put* (опцион на продажу), который дает право держателю опциона продать актив.

Выписывая опцион, продавец открывает по данной сделке короткую позицию, а покупатель – длинную позицию. Соответственно понятия короткий *call* или *put* означают продажу опциона *call* или *put*, а длинный *call* или *put* – их покупку.

С точки зрения сроков исполнения различают опционы:

1) американский опцион, который может быть исполнен в любой день до истечения контракта или в этот день;

2) европейский опцион, который может быть исполнен только в день истечения контракта.

Названия опционов не имеют отношения к географическому месту совершения сделок. Оба типа контрактов заключаются как в американских, так и в европейских странах. Большая часть контрактов, заключаемых в мировой практике, – американские опционы.

Если продавец опциона действительно имеет акции, о которых идёт речь, то говорят, что опцион *call* покрытый; если же продавец опциона не имеет акций, то говорят, что опцион *call* непокрытый. В этом случае продавец опциона обязан внести на биржу маржу (залог исполнения контракта).

9.4 Моделирование прибыли/убытков производных ценных бумаг

Будем считать, что дериватив продаётся в момент времени 0 и может быть предъявлен к исполнению в момент времени T . Пусть S есть цена базисного актива в момент времени t . Обозначим цену фьючерса в момент времени t как $F(S, t)$, цену опциона *call* – $C(S, t)$, цену опциона *put* – $P(S, t)$. Цену исполнения дериватива обозначим K .

Рассмотрим стоимость деривативов непосредственно перед моментом исполнения T .

Поскольку фьючерс обязателен к исполнению, то к моменту истечения контракта его цена составит

$$F(S, T) = S - K.$$

Опционы необязательны к исполнению.

Опцион call. Если цена базисного актива S меньше или равна цене исполнения K , то такой опцион исполняться не будет, и его стоимость перед моментом истечения срока будет равна нулю. Если же $S > K$, то опцион исполняется, и прибыль по нему равна $S - K$. Таким образом, стоимость опциона *call*

$$C(S, T) = \max(S - K, 0) = \begin{cases} S - K, & \text{если } S > K, \\ 0, & \text{если } S \leq K. \end{cases}$$

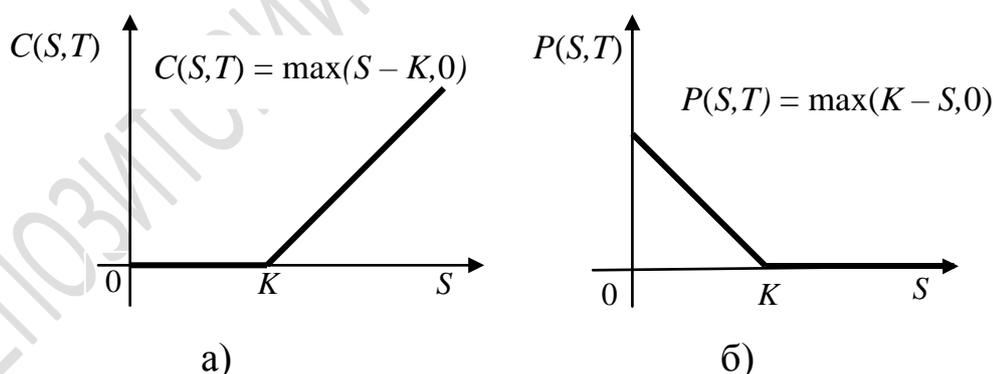
Опцион put. Если цена базисного актива S больше или равна цене исполнения K , то опцион исполняться не будет, и его стоимость перед моментом истечения срока будет равна нулю. Если же $S < K$, то опцион исполняется, и прибыль по нему равна $K - S$. Таким образом, стоимость опциона *put*

$$P(S, T) = \max(K - S, 0) = \begin{cases} K - S, & \text{если } S < K, \\ 0, & \text{если } S \geq K. \end{cases}$$

Заметим, что стоимости $C(S, T)$ и $P(S, T)$ связаны соотношением

$$C(S, T) - P(S, T) = S - K = F(S, T).$$

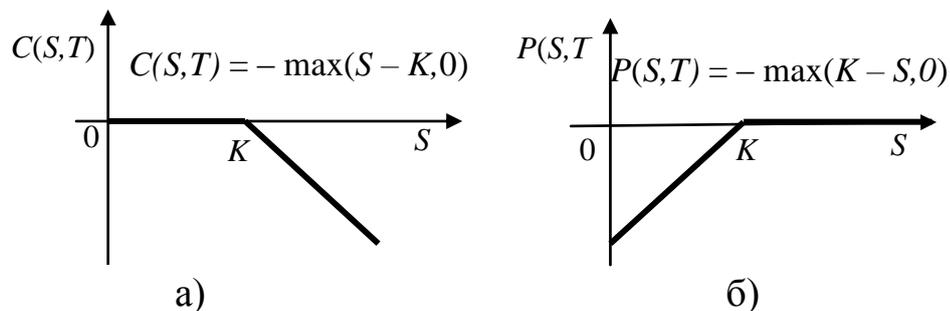
Стоимости $C(S, T)$ и $P(S, T)$ выражают прибыли/убытки покупателей опционов без учета выплаты премии, и их графики представлены на рисунке 9.3.



а) *call*, б) *put* без учета премий

Рисунок 9.3 – Прибыли/убытки опционов

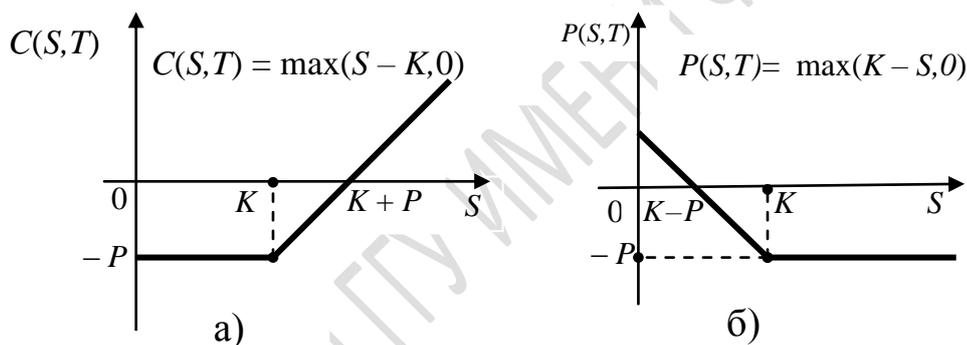
Прибыли/убытки покупателей опционов есть убытки/прибыли продавцов, которые в этих сделках занимают противоположную позицию. Графики прибылей/убытков продавцов опционов без учета выплаты премии представлены на рисунке 9.4.



а) *call*, б) *put* без учета премии

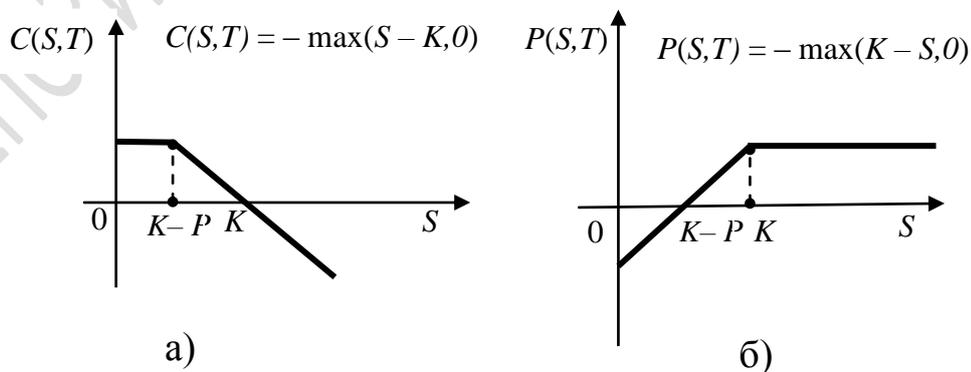
Рисунок 9.4 – Прибыли/убытки продавцов опционов

За приобретение права купить актив покупатель платит продавцу премию P за опцион. С учетом данной премии прибыли/убытки покупателя и продавца изменяются на P и $(-P)$ соответственно (рисунок 9.5, 9.6).



а) *call*, б) *put*

Рисунок 9.5 – Прибыли/убытки опционов



а) *call*, б) *put* без учета премии

Рисунок 9.6 – Прибыли/убытки продавцов опционов

10 Опционные стратегии

10.1 Стратегии

Стратегия – это комбинация разных опционов и, возможно, базового актива в одном портфеле, который создан для достижения поставленной инвестором цели.

Пусть K *call*, K *put* – опционы *call* и *put* соответственно с ценой исполнения K , S_0 , S_T – цена базисного актива в моменты приобретения ($t = 0$) и исполнения ($t = T$) опциона, P – премия. Стратегии длинной позиции и их характеристики представлены в таблицах 10.1–10.11. Соответствующие стратегиям графики прибыли – на рисунках 10.1–10.10.

Таблица 10.1 – Основные стратегии длинной позиции

Стратегия	Содержание стратегии		Ожидания инвестора относительно цены базового актива
Покрытый опцион <i>call</i> (covered <i>call</i>)	Продажа K <i>call</i>	Покупка базового актива	Резкое возрастание
Покрытый опцион <i>put</i> (covered <i>put</i>)	Продажа K <i>put</i>	Продажа Базового актива	Резкое снижение
Стрэддл (straddle)	Покупка K <i>call</i>	Покупка K <i>put</i>	Резкое колебание (возрастание или снижение)
Стрэнгл (strangle)	Покупка K_1 <i>put</i>	Покупка K_2 <i>call</i> , $K_2 > K_1$	Колебание (возрастание или снижение)
Стрип (strip)	Покупка одного K <i>call</i>	Покупка двух K <i>put</i>	Резкое колебание (более вероятно падение)
Стрэп (strap)	Покупка двух K <i>call</i>	Покупка одного K <i>put</i>	Резкое колебание (более вероятен рост)
Бычий спред (bull spread)	Покупка K_1 <i>call</i>	Продажа K_2 <i>call</i> , $K_2 > K_1$	Незначительный рост
	Покупка K_1 <i>put</i>	Продажа K_2 <i>put</i> , $K_2 > K_1$	Незначительный рост
Медвежий спред (bear spread)	Покупка K_1 <i>call</i>	Продажа K_2 <i>call</i> , $K_2 < K_1$	Незначительное падение
	Покупка K_1 <i>put</i>	Продажа K_2 <i>put</i> , $K_2 < K_1$	Незначительное падение

Таблица 10.2 – Покрытый опцион *call* (covered call)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от продажи K call	от покупки базового актива		
$S_T < K$	P	$S_T - S_0$	$S_T - S_0 + P$	Резкое возрастание
$S_T \geq K$	$-(S_T - K) + P$	$S_T - S_0$	$K - S_0 + P$	

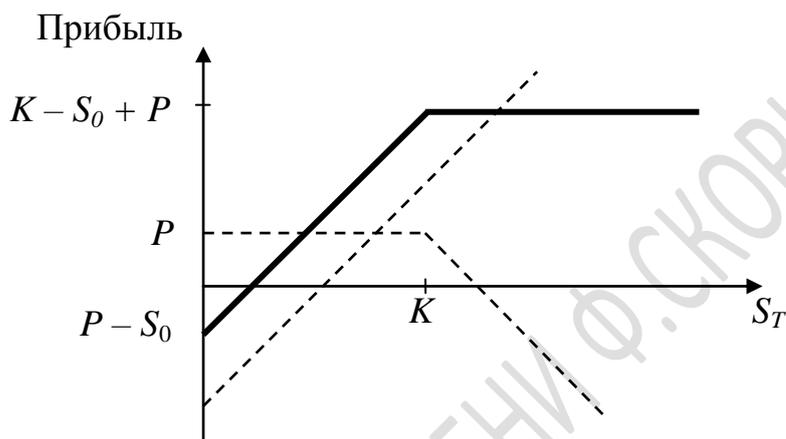


Рисунок 10.1 – График прибылей покрового опциона *call*

Таблица 10.3 – Покрытый опцион *put* (covered put)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от продажи K put	от продажи базового актива		
$S_T < K$	$-(K - S_T) + P$	$-(S_T - S_0)$	$S_0 - K + P$	Резкое снижение
$S_T \geq K$	P	$-(S_T - S_0)$	$S_0 - S_T + P$	

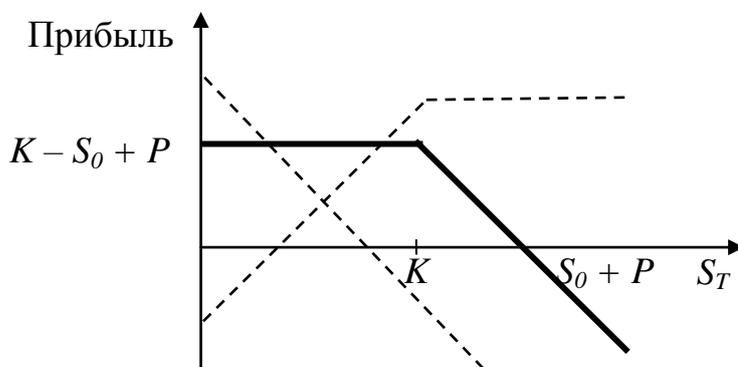


Рисунок 10.2 – График прибылей покрового опциона *put*

Таблица 10.4 – Стрэддл (straddle)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K call	от покупки K put		
$S_T < K$	$-P_c$	$K - S_T - P_p$	$K - S_T - P$	Резкое колебание (возрастание или снижение)
$S_T \geq K$	$S_T - K - P_c$	$-P_p$	$S_T - K - P$	

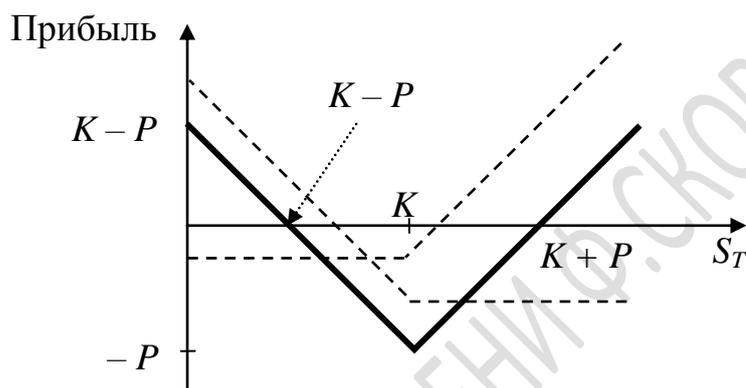


Рисунок 10.3 – График прибылей стрэддла

Таблица 10.5 – Стрэнгл (strangle)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K_1 put	от покупки K_2 call, $K_2 > K_1$		
$S_T < K_1$	$K_1 - S_T - P_p$	$-P_c$	$K_1 - S_T - P$	Резкое колебание (возрастание или снижение)
$K_1 \leq S_T < K_2$	$K_1 - S_T - P_p$	$S_T - K_2 - P_c$	$K_1 - K_2 - P$	
$S_T \geq K_2$	$-P_p$	$S_T - K_2 - P_c$	$S_T - K_2 - P$	

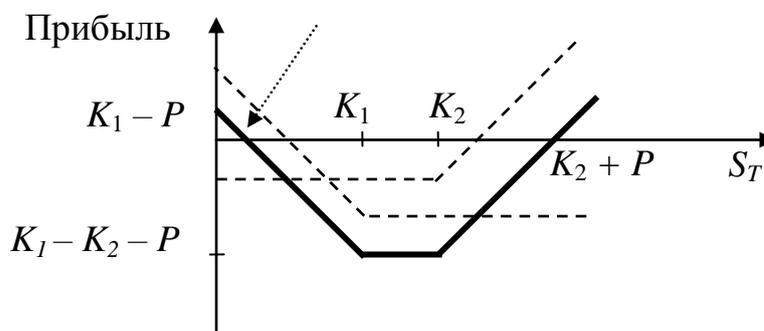


Рисунок 10.4 – График прибылей стрэддла

Таблица 10.6 – Стрип (strip)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K call	от покупки двух K put		
$S_T < K$	$-P_c$	$2(K - S_T - P_p)$	$2(K - S_T) - P$	Резкое колебание (более вероятно падение)
$S_T \geq K$	$S_T - K - P_c$	$-2P_p$	$S_T - K - P$	

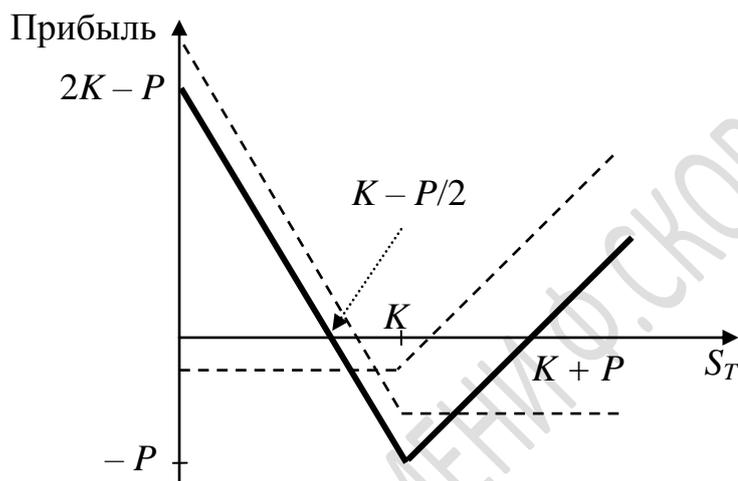


Рисунок 10.5 – График прибылей стрипа

Таблица 10.7 – Стрэйп (strap)

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки двух K call	от покупки одного K put		
$S_T < K$	$-2P_c$	$K - S_T - P_p$	$K - S_T - P$	Резкое колебание (более вероятен рост)
$S_T \geq K$	$2(S_T - K - P_c)$	$-P_p$	$2(S_T - K) - P$	

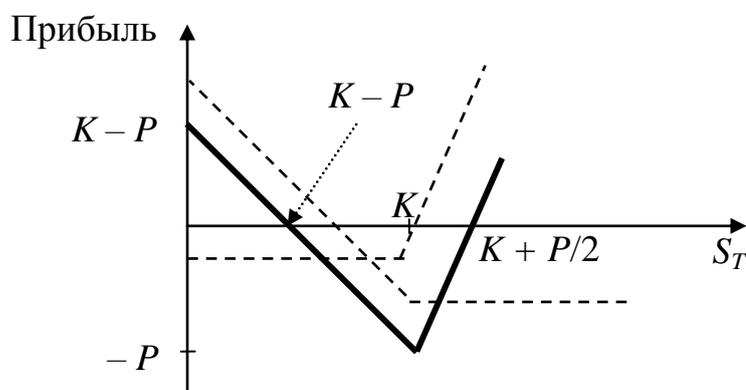


Рисунок 10.6 – График прибылей стрэпа

Таблица 10.8 – Бычий спред (bull spread) *call*

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K_1 call	от продажи K_2 call, $K_2 > K_1$		
$S_T < K_1$	$-P_1$	P_2	P	Резкое колебание (возрастание или снижение)
$K_1 \leq S_T < K_2$	$S_T - K_1 - P_1$	P_2	$S_T - K_1 + P$	
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_1 - P_1$	$-(S_T - K_2) + P_2$	$K_2 - K_1 + P$	

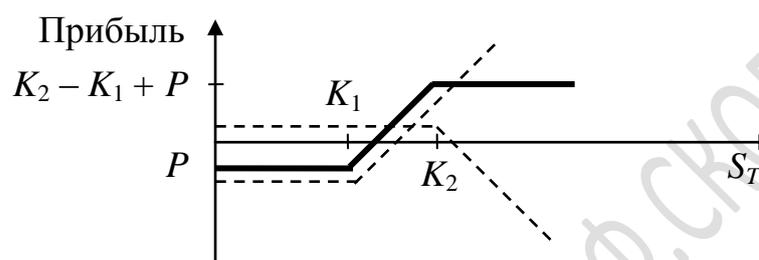


Рисунок 10.7 – График прибылей бычьего спреда *call*

Таблица 10.9 – Бычий спред (bull spread) *put*

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K_1 put	от продажи K_2 put, $K_2 > K_1$		
$S_T < K_1$	$K_1 - S_T - P_1$	$-(K_2 - S_T) + P_2$	$K_1 - K_2 + P$	Незначительный рост
$K_1 \leq S_T < K_2$	$-P_1$	$-(K_2 - S_T) + P_2$	$-(K_2 - S_T) + P$	
$S_T \geq K_2$	$-P_1$	P_2	P	

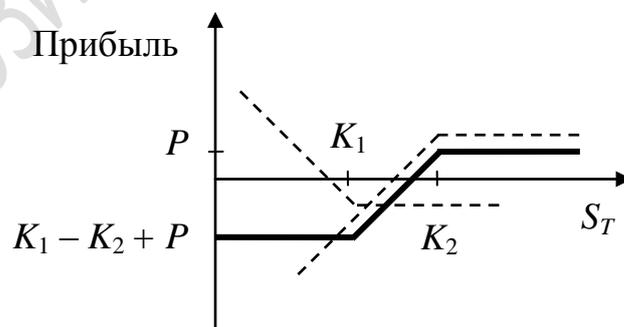


Рисунок 10.8 – График прибылей бычьего спреда *put*

Таблица 10.10 – Медвежий спред (bull spread) *call*

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K_1 call	от продажи K_2 call, $K_2 < K_1$		
$S_T < K_2$	$-P_1$	P_2	P	Незначительное падение
$K_2 \leq S_T < K_1$	$-P_1$	$-(S_T - K_2) + P_2$	$-(S_T - K_2) + P$	
$S_T \geq K_1$	$S_T - K_1 - P_1$	$-(S_T - K_2) + P_2$	$K_2 - K_1 - P$	

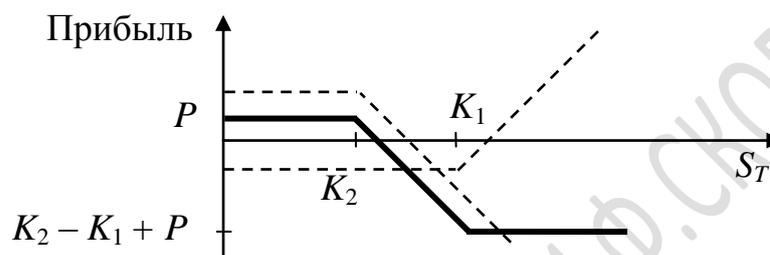


Рисунок 10.9 – График прибылей медвежьего спреда *call*

Таблица 10.11 – Медвежий спред (bull spread) *put*

Диапазон цен	Прибыль		Прибыль от стратегии	Ожидания инвестора относительно цены базового актива
	от покупки K_1 put	от продажи K_2 put, $K_2 < K_1$		
$S_T < K_2$	$K_1 - S_T - P_1$	$-(K_2 - S_T) + P_2$	$K_1 - K_2 + P$	Незначительное падение
$K_2 \leq S_T < K_1$	$K_1 - S_T - P_1$	P_2	$K_1 - S_T + P$	
$S_T \geq K_1$	$-P_1$	P_2	P	

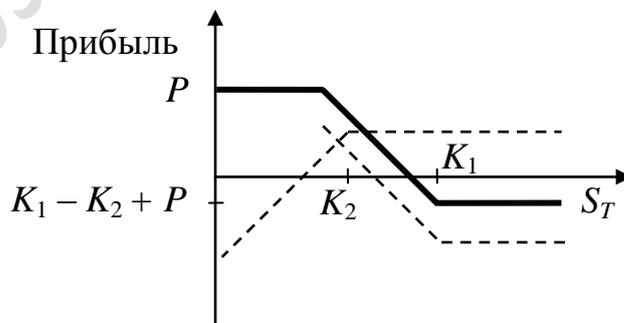


Рисунок 10.10 – График прибылей медвежьего спреда *put*

11 Формула Кокса-Росса-Рубинштейна

Цена актива меняется в соответствии с биномиальной моделью.

Пусть

S_0 – цена базисного актива в начальный момент ($t = 0$) приобретения опциона;

S_t – цена базисного актива в момент времени t , $t = 1, 2, \dots, T$;

r – безрисковая процентная ставка за единицу времени;

$S_t(1 + u)$, $S_t(1 + d)$ – возможные цены актива в момент времени $t + 1$, $-1 < d < r < u$.

11.1 Одношаговая модель

Формирование стоимости опциона V за единицу времени до даты истечения срока опциона представлено на рисунке 11.1.

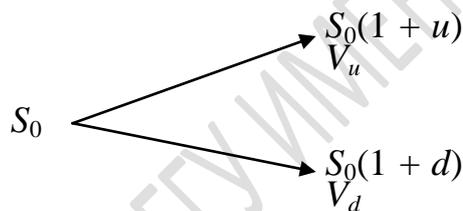


Рисунок 11.1 – Одношаговая модель

Стоимость опциона

$$V = \frac{1}{1+r} [p \cdot V_u + (1-p) \cdot V_d],$$

где V_u , V_d – стоимость опциона в момент исполнения $t = 1$;

$$p = \frac{r-d}{u-d} \text{ – вероятность «верхнего положения»};$$

$$1-p = \frac{u-r}{u-d} \text{ – вероятность «нижнего положения»}.$$

11.2 Двухшаговая модель

Формирование стоимости опциона V за два шага до даты истечения срока опциона представлено на рисунке 11.2.

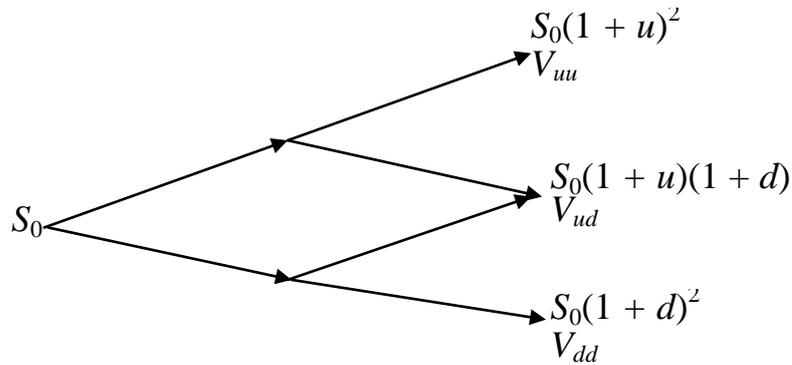


Рисунок 11.2 – Двухшаговая модель

Стоимость опциона

$$V = \frac{1}{(1+r)^2} (p^2 V_{uu} + 2p(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd}),$$

где V_{uu}, V_{ud}, V_{dd} – стоимость опциона в момент исполнения $t = 2$;

$$p = \frac{r-d}{u-d} \text{ – вероятность «верхнего положения»};$$

$$1-p = \frac{u-r}{u-d} \text{ – вероятность «нижнего положения»}.$$

11.3 Многошаговая модель

Стоимость опциона за $t = T$ шагов до исполнения

$$V = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^T C_T^k p^k (1-p)^{T-k} V(S_0(1+u)^k (1+d)^{T-k}, T),$$

где $V(S_0(1+u)^k (1+d)^{T-k}, T)$ – стоимость опциона в момент исполнения $t = T$, если цена актива $S_0(1+u)^k (1+d)^{T-k}$, при этом $V(S_0, 0) = P$.

12 Формула Блэка-Шоулса

Цена актива меняется в соответствии с моделью Самуэльсона.

Пусть

S_0 – цена базисного актива в начальный момент ($t = 0$) приобретения опциона;

S_t – цена базисного актива в момент времени $t, t \in [0, T]$;

r – безрисковая процентная ставка;

σ – волатильность стоимости базового актива;

K – цена исполнения опциона.

Стоимость опционов *call* и *put*

$$C(S_0, 0) = S_0 \cdot N(-x_0 + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT} N(-x_0),$$

$$P(S_0, 0) = Ke^{-rT} \cdot N(x_0) - S_0 \cdot N(x_0 - \sigma\sqrt{T}),$$

где $N(x)$ – функция стандартного нормального распределения;

$$x_0 = \frac{\ln \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Список использованных источников

- 1 Терпугов, А. Ф. Математика рынка ценных бумаг / А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 164 с.
- 2 Малюгин, В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа / В. И. Малюгин. – Минск: БГУ, 2001. – 318 с.
- 3 Люу, Ю. Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю. Д. Люу. – М. : Бинوم. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.
- 4 Халл, Дж. К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Дж. К. Халл. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. – 1056 с.
- 5 Саймон, В. Опционы. Полный курс для профессионалов / В. Саймон. – М. : Альпина Паблишер, 2003. – 416 с.
- 6 Ширяев, А. Н. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. / А. Н. Ширяев. – М. : Фазис, 1998. – Т. 1. Факты и модели. – 489 с.

Дополнительная

- 1 Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1980. – 576 с.
- 2 Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М. : Мир, 1971. – 536 с.

Приложение А

(справочное)

Порядковые номера дней в году

Таблица А1 – Порядковые номера дней в году

День	Месяц											
	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	217	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	213	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Производственно-практическое издание

**Марченко Лариса Николаевна,
Якубович Оксана Владимировна**

Методы анализа финансовых рынков

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 23.10.2017. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.

Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 822.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

Л. Н. Марченко, О. В. Якубович

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ**

Гомель
2017

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ