Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №5(50), Ч1, 2008

УДК 531.36:62–50

Решение классической задачи регулирования позиционными решениями линейно-квадратичных задач с ограничениями

А. В. Лубочкин

Введение. В классе ограниченных управлений рассматривается базовая задача классической теории регулирования. Задача регулирования — одна из основных задач классической теории автоматического регулирования [1]. Она состоит в построении обратной связи, которая переводит динамическую систему из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого и стабилизирует систему относительно нового состояния равновесия. Первая часть задачи регулирования явилась источником возникновения современной теории оптимального управления, в которой, как правило, исследуются процессы конечной продолжительности. Вторая часть задачи, связанная с процессами неограниченной продолжительности, также интенсивно исследуется в современной теории управления в рамках теории стабилизации [2], однако часто без учета ограничений на управления, без требований к качеству переходных процессов. При использовании результатов теории оптимального управления и теории стабилизации для решения задачи регулирования возникают определенные трудности. Во-первых, задача перевода системы с заданной точностью в окрестность нового состояния равновесия за фиксированное время не очень естественна для систем, функционирование которых не прекращается после достижения цели и протекает в условиях постоянно действующих возмущений. Во-вторых, трудно задать момент перехода от решения задачи оптимального управления к решению задачи стабилизации. В-третьих, в теории оптимального управления основные результаты получены в форме ограниченных программных управлений, которые не характерны ни для теории стабилизации, ни для классической теории автоматического регулирования, решающих свои задачи созданием подходящих обратных связей (правда, без учета ограничений на управления).

В данной работе используется метод комплексного решения классической задачи регулирования в обобщенной постановке. Он опирается на теорию оптимального управления и использует результаты, полученные по синтезу оптимальных систем для линейных [3] и линейно-квадратичных [4–6] задач. Работу можно рассматривать как развитие идей работ [7–9], в которых указанные методы оптимального управления были использованы для решения задачи стабилизации. Использованию с целью решения задачи регулирования линейно-негладких задач посвящена работа [10].

1 Постановка задачи. Пусть динамическая система с управлением при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \quad \left(x \in R^n,\ u \in R;\ \mathrm{rank}\,(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n\right). \tag{1}$$

Будем считать, что доступны только ограниченные управления $|u(t)| \leq L$, $t \geq 0$.

Пусть $X_0 = \{x \in R^n\colon\ Ax + bu_x = 0,\ |u_x| \leq L\}$ — множество возможных состояний равновесия системы (1); заданы число $0 < L < \infty$, вектор $z \in \mathrm{int}X_0$, область $G \subset R^n$ $(z \in G)$.

Функция

$$u = u_z(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

называется обратной связью, решающей классическую задачу регулирования для системы (1) в области G, если: 1) $u_z(z) = u_z$; 2) $|u_z(x)| \le L$, $x \in G$; 3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu_z(x), \quad x(0) = x_0 \in G, \tag{3}$$

имеет решение $x(t) \in G$, $t \ge 0$; 4) состояние равновесия $x(t) \equiv z$, $t \ge 0$, системы (3) асимптотически устойчиво в G.

С точки зрения приложений важно, чтобы дополнительно: 5) область притяжения G состояния равновесия z была достаточно большой; 6) переходные процессы в (3) были достаточно хорошими по отношению к выбранному критерию качества.

Суть задачи регулирования состоит в поиске обратной связи, при замыкании которой система приобретает новое устойчивое состояние равновесия. При решении задачи регулирования предлагается использовать методы оптимального управления (задачи оптимального управления, как и в [7–10], будут не основными, а вспомогательными). Основная идея подхода — не сводить задачу регулирования к задаче оптимального управления, а трактовать ее как задачу стабилизации около нового состояния равновесия. Решая последнюю методами оптимального управления, можно добиться сколь угодно высокого качества переходных процессов. Отказ от требования попадания системы с заданной точностью за конечное время в новое состояние равновесия соответствует условиям работы регуляторов в реальных условиях, когда математическая модель неточна, на систему действуют неучтенные возмущения и т.п.

Поставленная задача из-за требований 2), 5), 6) представляет очень сложную математическую проблему. Ее решение для достаточно сложных систем (1) вряд ли возможно без использования микропроцессоров. В связи с этим введенная выше «непрерывная» обратная связь (2) заменяется на «дискретную» обратную связь

$$u_z^\nu(x), \quad x \in G, \tag{4}$$

с заданным периодом квантования $\nu > 0$. При замене в (3) непрерывной обратной связи (2) на дискретную (4) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu_z^\nu(x), \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

представляет решение уравнения $\dot{x} = Ax + bu(t)$, $x(0) = x_0$, где $u(t) = u_z^\nu(x(\tau_k)) \equiv u_k$, $t \in [\tau_k, \tau_k + \nu[$, $\tau_k = k\nu$, $k = 0, 1, \ldots$.

Построение реализации в реальном времени обратной связи $u_z^\nu(x)$, $x \in G$ (4) в каждом конкретном процессе управления (регулирования) будем вести, используя позиционное решение вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления.

2 Сопровождающая задача оптимального управления. Пусть $0 < \Theta < \infty$ — параметр метода. Функцию $u(t)$, $t \in T = [0, \Theta]$, назовем дискретным управлением (с периодом квантования $\nu = \Theta/N$), если $u(t) = u(k\nu) \equiv u_k$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu[$, $k = \overline{0, N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим следующую линейно-квадратичную терминальную задачу оптимального управления

$$B_\Theta(y) = \min \int_0^\Theta (u(t) - u_z)^2 \, dt,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = y, \quad x(\Theta) = z, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T = [0, \Theta]. \tag{6}$$

Пусть $u_z^0(t\,|\,y)$, $t \in T$ — оптимальная (дискретная) программа задачи (6), G_Θ — множество всех состояний y, для которых задача (6) имеет решение. Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Theta < \infty$, что в ε-окрестности множества G_Θ будут содержаться все состояния, из которых можно вдоль траекторий системы (1) попасть в состояние z с помощью управлений, ограниченных по модулю числом L. Другими словами, множество G_Θ можно построить почти совпадающим с областью управляемости в z системы (1).

Функция

$$u_z(y) = u_z^0(0\,|\,y), \quad y \in G_\Theta, \tag{7}$$

называется оптимальным стартовым управлением типа обратной связи для задачи (6). В [8, 9] описан алгоритм работы регуляторов, которые способны в режиме реального времени строить реализацию $u^*(t) = u_z(x^*(t))$, $t \geq 0$, обратной связи (7) для каждого реализовавшегося процесса управления $x^*(t)$, $t \geq 0$. В качестве реализации $u_z^\nu(x)$, $x \in G_\Theta$, регулирующей дискретной обратной связи (4) и предлагается использовать реализацию $u^*(t)$, $t \geq 0$, оптимальной стартовой обратной связи (7). Нетрудно показать, что обратная связь $u_z^\nu(x) = u_z(x)$, $x \in G_\Theta$, решает классическую задачу регулирования, т.е. удовлетворяет всем требованиям п.1.

3 Основные свойства оптимальной обратной связи сопровождающей задачи оптимального управления. Очевидно, что $u_z(z) = u_z^\nu(z) = u_z$, т.е. z — состояние равновесия замкнутой системы (5); $|u_z^\nu(x)| \leq L$, $x \in G_\Theta$. По определению дискретной обратной связи замкнутая система (5) с $u_z(x) = u_z^\nu(x)$ имеет решение при любом $x_0 \in G_\Theta$. Используя метод функций Ляпунова, нетрудно показать, что решение $x(t) = z$, $t \geq 0$, системы (5) асимптотически устойчиво (при этом $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$ — функция Ляпунова). Ясно, что $B_\Theta(z) = 0$, $B_\Theta(x) > 0$ при $x \neq z$; $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$, — непрерывная функция. Далее нетрудно показать, что функция $B_\Theta(x)$, $x \in G_\Theta$, убывает вдоль каждой траектории системы (5).

Качество переходных процессов в замкнутой системе определяется следующим экстремальным свойством: $\int_0^\infty (u^*(t) - u_z)^2\,dt \leq \int_0^\Theta (u_z^0(t\,|\,y_0^*) - u_z)^2\,dt$. Последнее неравенство означает, что затрачиваемая энергия на весь процесс регулирования не превосходит мимнимальной энергии на процесс перевода системы (1) в состояние равновесия z за время Θ.

4 Алгоритм работы регулятора. Регулятор работает следующим образом. До начала процесса функционирования системы в момент $\tau = 0$ он строит оптимальную (дискретную) программу $u_z^0(t\,|\,x_0^*)$, $t \in T$, задачи (6), соответствующую начальному состоянию $x_0 = x_0^*$ (т.е. при $y = x_0^*$). Это можно сделать, например, с помощью двойственного метода квадратичного программирования [11]. Управление $u^*(t) = u_z^0(0\,|\,x_0^*)$, $t \in [0, \nu[$, подается на вход системы (1): $u(\tau) = u^*(\tau)$, $\tau \in [0, \nu[$ и порождает ее состояние $x^*(\nu) = x^*(\nu\,|\,x_0^*)$.

Предположим, что регулятор проработал в моменты $0, \nu, \ldots, (s-1)\nu$, и замкнутая система (5) оказалась в состоянии $x^*(\tau) = x^*(\tau\,|\,x^*(\tau - \nu))$, $\tau = s\nu$. В предыдущий момент $\tau - \nu = (s-1)\nu$, когда система находилась в состоянии $x^*(\tau - \nu) = x^*(\tau - \nu\,|\,x^*(\tau - 2\nu))$, регулятор уже решил задачу с $y = x^*(\tau - \nu)$. Задача (6) для двух соседних моментов τ и $\tau - \nu$ отличается только начальными условиями $x^*(\tau - \nu)$, $x^*(\tau)$, и это отличие тем меньше, чем меньше ν. Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (6) является метод коррекции с помощью двойственного метода квадратичного программирования [11]. Построив решение $u_z^0(t\,|\,x^*(s\nu))$, $t \in T$, задачи (6) с $y = x^*(s\nu)$, получаем реализацию $u^*(t) = u^0_z(0 \,|\, x^*(s\nu))$, $t \in [0, \nu[$, стартовой обратной связи, которая подается на вход системы (1) на промежутке времени $[s\nu, (s+1)\nu[$: $u(\tau) = u^*(\tau - s\nu)$, $\tau \in [s\nu, (s+1)\nu[$. Если время, необходимое для коррекции решения задачи (6) при переходе от $y = x^*(\tau - \nu)$ к $y = x^*(\tau)$, а значит и для вычисления $u^*(\tau)$, не превосходит ν, то можно говорить о решении задачи регулирования в режиме реального времени.

Abstract. Feedback optimal control realization of linear-quadratic problems with restrictions is suggested in the paper for the solution of this problem. The suggested regulators can be realized on modern computers in real-time mode.

Литература

1. Айзерман, М. А. Лекции по теории автоматического регулирования / М. А. Айзерман. – М.: Физматгиз, 1958.

2. Красовский, Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – С. 475–514.

3. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова // Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1992. – № 4. – С. 3–19.

4. Габасов, Р. Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления / Р. Габасов, А. В. Лубочкин // Автоматика и телемех., 1997. – № 9. – С. 3–14.

5. Кириллова, Ф. М. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / Ф. М. Кириллова, А. В. Лубочкин // Докл. РАН, 1997. – Т. 356, № 6. – С. 736–739.

6. Лубочкин, А. В. Дискретная реализация позиционного решения в линейно-квадратичной задаче с ограничениями / А. В. Лубочкин // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2003. – № 3 (18). – С. 32–37.

7. Габасов, Р. К методам стабилизации динамических систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова // Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1994. – № 3. – С. 67–77.

8. Габасов, Р. Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач / Р. Габасов, А. В. Лубочкин // ПММ, 1998. – Т. 62, Вып. 4. – С. 556–565.

9. Лубочкин, А. В. Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-квадратичных задач с ограничениями / А. В. Лубочкин // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2006. – № 4 (37). – С. 39–42.

10. Габасов, Р. Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. А. Ружицкая // Автоматика и телемех., 2001. – № 6. – С. 18–29.

11. Ракецкий, В. М. Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом / В. М. Ракецкий // Програм. обеспечение ЭВМ. – Мн.: Ин-т математики АН БССР, 1985. – Вып. 55. – С. 124–129.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.05.08