

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ДИФРАКЦИИ СВЕТА  
НА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ

Н. А. Бродович

В работе рассмотрена дифракция света на двух встречных бегущих ультразвуковых волнах с разными амплитудами и одинаковыми частотами. Выведено дифференциально-разностное уравнение для амплитуд спектров различных порядков. В случае наклонного падения света в режиме дифракции Рамана—Ната методом теории возмущений получены поправки к решению в виде функций Бесселя. В случае режима дифракции Брэгга дан гармонический анализ интенсивности дифрагированного света и изучена зависимость интенсивностей гармоник от угла падения света.

В настоящей работе рассматривается дифракция света на двух встречных бегущих ультразвуковых волнах с разными амплитудами и одинаковыми частотами. Выведено дифференциально-разностное уравнение для амплитуд спектров различных порядков. В случае наклонного падения света при дифракции Рамана—Ната методом теории возмущений получены поправки к решению в виде функций Бесселя. В случае дифракции Брэгга дан гармонический анализ интенсивности дифрагированного света.

Выберем систему координат, в которой ультразвук распространяется по оси  $x$ , а свет под углом  $\varphi$  к фронту ультразвуковой волны и введем следующие обозначения:  $E$  — напряженность электрического поля световой волны;  $E^i$  — напряженность электрического поля световой волны в  $i$ -ом дифракционном порядке,  $\omega$  — циклическая частота падающего света,  $\lambda$  — длина волны света в вакууме;  $\omega^*$  — циклическая частота ультразвука;  $\lambda^*$  — длина волны ультразвука в среде;  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число световой волны;  $k^*=2\pi/\lambda^*$  — волновое число ультразвуковой волны;  $\varphi$  — угол падения света;  $\mu$  — показатель преломления возмущенной среды;  $\mu_0$  — показатель преломления невозмущенной среды;  $\mu_1$  — амплитуда изменения показателя преломления, вызываемого первой ультразвуковой волной;  $\mu_2$  — амплитуда изменения показателя преломления, вызываемого второй ультразвуковой волной;  $s=\mu_0/\mu_1$  — коэффициент стационарности волны ( $0 \leq s \leq 1$ );  $v=k\mu_1 z(1+s)/\cos\varphi$ ;  $\rho=k^{*2}/k^2\mu_0\mu_1(1+s)$ ;  $a=k^*/k\mu_1(1+s)$ ;  $b=\mu_0k/k^*$ .

В выбранной системе координат уравнение, описывающее дифракцию света на ультразвуковых волнах, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -k^2\mu^2\Phi, \quad (1)$$

где  $\Phi(x, z, s, t) = E(x, z, s, t) e^{i\omega t}$

$$\mu(x, z, s, t) = \mu_0 - \mu_1 [\sin(\omega^*t - k^*x) + s \sin(\omega^*t + k^*x)]$$

с граничным условием

$$\Phi|_{z=0} = \exp(-ik\mu_0 x \sin\varphi). \quad (2)$$

Решение (1) ищем в виде суммы дифрагированных плоских волн

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \Phi_n(s, z, t) \exp(ink^*x - ik\mu_0 \sin\varphi x - ik\mu_0 z \cos\varphi). \quad (3)$$



Пренебрегая  $d^2\Phi_n/dz^2$  по сравнению с  $k\mu_0(d\Phi_n/dz)$  и переходя от переменной  $z$  к переменной  $v$  получаем следующую систему дифференциально разностных уравнений для амплитуд спектров различных порядков:

$$2 \frac{d\Phi_n}{dv} - (\Phi_{n-1} - \Phi_{n+1}) \sin \omega^*t - i \frac{(1-s)}{(1+s)} (\Phi_{n-1} + \Phi_{n+1}) \cos \omega^*t = i\rho (n^2 - 2nb \sin \varphi) \Phi_n \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\Phi_0|_{z=0} = 1, \quad \Phi_n|_{z=0} = 0 \quad (n \neq 0). \quad (5)$$

Рассмотрим случай дифракции Рамана—Ната ( $v\rho \ll 1$ ) и стоячей ультразвуковой волны ( $s=1$ ). В этом случае уравнение (4) имеет вид

$$2 \frac{d\Phi_n}{dv} (\Phi_{n-1} - \Phi_{n+1}) \sin \omega^*t = i\rho (n^2 - 2nb \sin \varphi) \Phi_n \quad (6)$$

с граничными условиями (5). Поскольку  $\rho \ll 1$ , ищем решение (6) в виде

$$\Phi_n = J_n + i\rho\varphi_n + \rho^2\psi_n, \quad (7)$$

пренебрегая членами порядка  $\rho^3$ . При этом функции  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  удовлетворяют следующим рекуррентным дифференциальным уравнениям

$$2 \frac{d\varphi_n}{dv} - (\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}) \sin \omega^*t = (n^2 - 2nb \sin \varphi) J_n, \quad (8)$$

$$2 \frac{d\psi_n}{dv} - (\psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \sin \omega^*t = \frac{n^2}{12} [n(2n+1)vJ_n \sin \omega^*t - v^2 \sin^2 \omega^*t J_{n+1} - 6bnv \sin \omega^*t \sin \varphi J_n] \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\varphi_n|_{z=0} = \psi_n|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

Решая (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n = J_n + \frac{i\rho}{12} [n(2n+1)vJ_n - v^2 \sin \omega^*t J_{n+1} - 6bnv \sin \varphi J_n] + \\ + \frac{\rho^2}{1440} [2n^2(1-10n^2)v^2J_n - 3(1+6n^2)v^3 \sin \omega^*t (J_{n-1} - J_{n+1}) - \\ - \frac{9}{4}v^4 \sin^2 \omega^*t (J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}) - 180n^2b^2 \sin^2 \varphi v^2 J_n - \\ - 30b^2 \sin^2 \varphi v^3 \sin \omega^*t (J_{n-1} - J_{n+1})] \quad (11) \end{aligned}$$

(аргументом функций Бесселя в (11) является  $v \sin \omega^*t$ ). В случае нормального падения ( $\varphi=0$ ) разложение  $\Phi_n$  в ряд по степеням  $\rho$  и  $v$  совпадает с рядом, данным Мертенсом [1]. Используя (11), нетрудно показать, что интенсивности спектров больших порядков меньше, чем интенсивности, рассчитанные по теории Рамана—Ната, т. е.  $|\Phi_n|^2 < J_n^2$  при больших  $n$ . Вышесказанное согласуется с фактом, что теория Рамана—Ната дает завышенные значения интенсивностей высоких дифракционных порядков [2].

Следуя Фаризо [3], в случае режима дифракции Брэгга ( $v\rho \gg 1$ ,  $\sin \varphi \simeq \simeq \lambda/2\mu_0\lambda^*$ ) интенсивности спектров нулевого и первого порядков определяются по формулам

$$I^0 = \frac{1}{\sigma^2 + \gamma} \left[ \cos^2 \left( \frac{v}{2} \sqrt{\sigma^2 + \gamma} \right) \gamma + \sigma^2 \right], \quad (12)$$

$$I^1 = \frac{\gamma}{\sigma^2 + \gamma} \sin^2 \left( \frac{v}{2} \sqrt{\sigma^2 + \gamma} \right), \quad (13)$$



где

$$\sigma = (\rho - 2a \sin \varphi)/2,$$

$$\gamma = (1 - 2s \cos 2\omega^*t + s^2)/(1 + s)^2.$$

Гармонический анализ интенсивности дифрагированного света показывает, что интенсивность света в каждом порядке при любом  $s$  содержит лишь четные гармоники ультразвука, т. е.

$$I^i = \sum_{p=0}^{\infty} I_{2p\omega^*}^i \cos 2p\omega^*t, \quad (14)$$

где  $i=0, 1$  — порядок спектра, а интенсивность  $p$ -той гармоники находится по формуле

$$I_{2p\omega^*}^i = \delta_{ip0} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-n} (-)^{i+n+l} \frac{v^{2k}}{(2k)!} \sigma^{2n} \left( \frac{1+s^2}{(1+s)^2} \right)^l \left( \frac{s}{(1+s)^2} \right)^{k-n-l} \times$$

$$\times C_{k-1}^n C_{k-n}^l \left( \delta_{p0} \delta_{k-n-l-p, 2t} C_{k-n-l}^{\frac{k-n-l-p}{2}} + \frac{1}{2} (1 - \delta_{p0}) C_{k-n-l}^{\frac{k-n-l}{2}} \right), \quad (15)$$

где

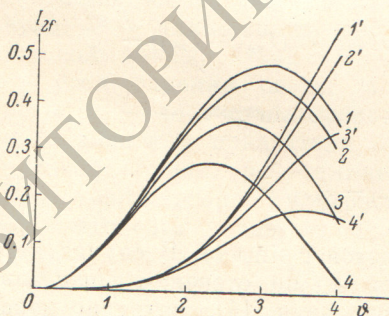
$$\delta_{ip0} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=0, p=0, \\ 0 & \text{при } i=0, p \neq 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, \end{cases}$$

$$\delta_{p0} = \begin{cases} 1 & \text{при } p \neq 0, \\ 0 & \text{при } p=0, \end{cases}$$

$$\delta_{k-n-l-p, 2t} = \begin{cases} 1 & \text{при } k-n-l-p \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } k-n-l-p \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (16)$$

В случае стоячей волны ( $s=1$ ) для интенсивности  $p$ -той гармоники имеем следующее выражение:

$$I_{2p\omega^*}^i = \delta_{ip0} + \delta_{p, 1/2} \sum_{k=p}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-p} (-)^{i+k+p} \frac{v^{2k}}{(2k)!} \frac{\sigma^{2n}}{2^{2(k-n)}} C_{k-1}^n C_{k-n-p}^{2(k-n)}, \quad (17)$$



Зависимость интенсивности второй (1—4) и четвертой (1'—4') гармоник в нулевом порядке от параметра  $v$  при различных углах падения света.

1, 1' ~  $\varphi = 176.5'' = \Theta_{\text{Бр.}} = \lambda/2\mu_0\lambda^*$ , где  $\Theta_{\text{Бр.}}$  — брэгговский угол; 2, 2' ~  $\varphi = 180.1''$ ; 3, 3' ~  $\varphi = 183.6''$ ; 4, 4' ~  $\varphi = 187.1''$ .

интенсивность нечетных гармоник имеет порядок малости  $\mu_1/\mu_0$  по сравнению с четными. На рисунке представлена зависимость интенсивности второй и четвертой гармоник в нулевом максимуме от параметра  $v$  при различных углах падения света, близких к брэгговскому.

где

$$\delta_{p, 1/2} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } p=0, \\ 1 & \text{при } p \neq 0. \end{cases} \quad (18)$$

В случае дифракции на стоячей волне при угле падения, точно равном брэгговскому ( $\varphi = \lambda/2\mu_0\lambda^*$ ), интенсивность  $p$ -той гармоники находится по формуле

$$I_{2p\omega^*}^i = (1/2) [1 + (-)^i J_0(v)] (1 - \delta_{p0}) + \delta_{p0} (-)^i J_{2p}(v). \quad (19)$$

Заметим, что если при решении задачи не пренебрегать  $d^2\Phi_n/dv^2$  по сравнению с  $(\mu_0/\mu_1)(d\Phi_n/dv)$ , то получим, что интенсивности спектров содержат как четные, так и нечетные гармоники частоты ультразвука, причем



Рассмотрим гармонический состав света, полученного при дифракции Брэгга при наложении спектров нулевого и первого порядков. При дифракции на стоячей ультразвуковой волне ( $e = 1$ ) имеем

$$\left. \begin{aligned} E^0 &= \cos\left(\frac{v}{2} \sin \omega^* t\right) e^{-i\omega t}, \\ E^1 &= \sin\left(\frac{v}{2} \sin \omega^* t\right) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Результирующая интенсивность равна

$$I_{\text{рез.}} = |E^0 + E^1|^2 = I^0 + I^1 + (B), \quad (21)$$

где

$$(B) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(v) \sin(2n+1)\omega^* t. \quad (22)$$

При дифракции на бегущей волне ( $s = 0$ ) имеем

$$\left. \begin{aligned} E^0 &= \cos(v/2) e^{-i\omega t}, \\ E^1 &= \sin(v/2) e^{-i(\omega t + \omega^* t)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Результирующая интенсивность равна

$$I_{\text{рез.}} = I^0 + I^1 + (B), \quad (24)$$

где

$$(B) = \sin v \cos \omega^* t, \quad (25)$$

т. е. при дифракции Брэгга на стоячей волне при наложении спектров нулевого и первого порядков появляются нечетные гармоники частоты ультразвука. Заметим, что при дифракции Рамана—Ната нечетные гармоники появляются лишь при  $0 \leq s < 1$  [4].

#### Литература

- [1] R. Mertens. *Med. Kon. VI Acad. Wetensch. België.* 12, № 7, p. 3, 1950.
- [2] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики.* Изд. «Наука», 1970.
- [3] P. Phariseau. *Proc. Indian Acad. Sci.*, 44, 165, 1956.
- [4] N. Segard, J. Pouliquen. *Compt. Rend.*, 262, № 24 A, B, 1498, 1966.

Поступило в Редакцию 16 апреля 1971 г.