

УДК 530.1;539.12

Пуанкаре-ковариантная модель водородоподобных систем. Релятивистские эффекты высших порядков

В. В. АНДРЕЕВ

Введение

Изучение характеристик связанных систем является важнейшим источником информации о свойствах взаимодействий элементарных частиц. Так, интервал $(1s - 2s)$ в атоме водорода измерен с очень высокой точностью порядка 10^{-2} килоГерц (относительная ошибка $\delta = 2 * 10^{-14}$) [1]. Имеются аналогичные измерения и для сверхтонкой структуры. В этой связи для объяснения экспериментальных данных в рамках квантово-полевых моделей необходимо учитывать как релятивистские эффекты, так и эффекты высших порядков по константе взаимодействия. Для такого рода вычислений требуются методики, позволяющие проводить численные расчеты этих эффектов с высокой точностью.

В данной работе предлагается для анализа эффектов электромагнитного взаимодействия водородоподобных систем использовать новую методику вычислений, основанную на использовании импульсного представления и точного вычисления спинорной части потенциала таких систем. С помощью этой методики рассчитаны релятивистские вклады высших порядков для мюонного и обычного атома водорода, связанные состояния которых описываются калибровочно-инвариантной пуанкаре-ковариантной моделью, основанной на точечной форме релятивистской гамильтоновой динамики (РГД).

1. Описание связанной двухчастичной системы в пуанкаре-ковариантной модели

Главным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух частиц с массами m_q и m_Q и соответственно с 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование, в рамках мгновенной и точечной форм РГД, приводит к уравнению для связанного состояния с волновой функцией (ВФ) $\Phi_{L,S}^{J\mu}(k)$:

$$\sum_{L',S'} \int_0^{\infty} V_{L,S;L',S'}^J(k, k') \Phi_{L',S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{L,S}^{J\mu}(k), \quad (1)$$

где $M_0 = \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_q}(k)$ – эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$).

Рассмотрим для определенности связанную систему электрона e^- и протона p (атом водорода), а также систему $\mu^- - p$. Заметим, что несмотря на большое количество исследований для данных систем [2–4] в рамках моделей, основанных на РГД, такие исследования не проводились. Для построения потенциала V применим методику [5] с использованием амплитуды упругого рассеяния фермионов системы:

$$e^-(k_1, \lambda_{k_1}) + p(k_2, \lambda_{k_2}) \rightarrow e^-(p_1, \lambda_{p_1}) + p(p_2, \lambda_{p_2}), \quad (2)$$

где импульсы частиц и спиновые индексы указаны в скобках.

Согласно теории возмущений матричный элемент потенциала фермион-фермионной системы будет представлять ряд матричных элементов по постоянной тонкой структуры α . Основной вклад в потенциал системы определяет однофотонный обмен между фермионами. Также в потенциале учтем слагаемые, содержащие более высокие порядки по константе взаимодействия α (поляризация вакуума, обмен фотоном между электронами).

Требование калибровочной инвариантности приводит к потенциалу взаимодействия:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} \| \hat{V} \| \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle = & - \frac{Z\alpha}{\sqrt{\omega_{m_1}(k) \omega_{m_1}(k') \omega_{m_2}(k) \omega_{m_2}(k')}} \times \\ & \times \frac{\Pi(\alpha, q^2)}{8\pi^2 q^2} J_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}^\mu(p_1, k_1) \left(g_{\mu\rho} - \frac{q_\mu q_\rho}{q^2} \right) J_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}}^\rho(p_2, k_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где одночастичные фермионные токи записываются в виде:

$$\begin{aligned} J_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}^\mu(p_1, k_1) &= \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \left(F_1^e(q_1^2) \gamma^\mu + \frac{F_2^e(q_1^2)}{2m_1} i\sigma^{\mu\nu} q_{1,\nu} \right) u_{\lambda_{k_1}}(k_1), \\ J_{\lambda_{p_2}, \lambda_{k_2}}^\mu(p_2, k_2) &= \bar{u}_{\lambda_{p_2}}(p_2) \left(F_1^p(q_2^2) \gamma^\mu + \frac{F_2^p(q_2^2)}{2m_2} i\sigma^{\mu\tau} q_{2,\tau} \right) u_{\lambda_{k_2}}(k_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Формфакторы электрона в (3) и (4) определяются соотношениями

$$\Pi(\alpha, q^2) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{3} - \left(3 - \frac{1}{b^2} \right) \left(1 - \frac{\text{arctanh}(b)}{b} \right) \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_1^e(\alpha, q^2) &= 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{b} \left\{ (1+b^2) \text{arth}(b) - b \right\} \ln \left(\frac{2\omega_{\min}}{m_e} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2b} \left\{ \left[(1+b^2) \ln \left(\frac{1-b^2}{4} \right) + 4 + b^2 \right] \text{arth}(b) - 2b \right\} - \frac{(1+b^2)}{2b} \times \\ &\times \left. \left\{ \text{Li}_2 \left(\frac{1-b}{2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1+b}{2} \right) + 2 \text{Li}_2(b) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(b^2) \right\} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$F_2^e(\alpha, q^2) = \frac{\alpha(1-b^2) \text{arctanh}(b)}{2\pi b}, \quad (b = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 + 4m_e^2}}) \quad (7)$$

а $F_{1,2}^p(q_2^2)$ – формфакторы протона. Импульсы частиц в системе центра инерции имеют следующие компоненты

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega_{m_1}(k), \mathbf{k}), \quad p_1 = (\omega_{m_1}(k'), \mathbf{k}'), \\ k_2 &= (\omega_{m_2}(k), -\mathbf{k}), \quad p_2 = (\omega_{m_2}(k'), -\mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (8)$$

а 4-импульс q : $q = \{q_0 = 0, \mathbf{k} - \mathbf{k}'\}$. Параметр Z задает определяет величину электрического заряда второго фермиона.

2. Энергетические характеристики водородоподобных систем систем в пуанкаре-ковариантной модели

Для нахождения энергетических характеристик релятивистской водородоподобной системы используем выражение

$$E = \int_0^{\infty} |\tilde{R}_{n\ell}^C(k)|^2 \left[\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} \right] k^2 dk + \sum_{L,S,L',S'} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{R}_{n\ell}^C(k) V_{L,S,L',S'}^J(k, k') \tilde{R}_{n\ell}^C(k') k'^2 k^2 dk' dk \quad (9)$$

с пробными функциями

$$\tilde{R}_{n\ell}^C(k) = \sqrt{\frac{2(n-\ell-1)!}{\pi(n+\ell)!}} \frac{n^2 2^{2(\ell+1)} \ell! n^\ell (k/\beta)^\ell}{\beta^{3/2} (n^2 (k/\beta)^2 + 1)^{\ell+2}} \mathcal{G}_{n-\ell-1}^{\ell-1} \left(\frac{n^2 (k/\beta)^2 + 1}{n^2 (k/\beta)^2 + 1} \right), \quad (10)$$

где $\mathcal{G}_n^\ell(x)$ — полиномы Гегенбауэра.

Основная особенность нашего способа получения собственных значений системы релятивистских частиц состоит в использовании импульсного пространства и точного расчета спинорной части потенциала (3). Схема получения матричного элемента $V_{L',S',L,S}^J(k, k')$ ядра радиального уравнения связанной системы (1) содержит ряд вычислительных задач. Во-первых, используем точный расчет спинорной части потенциала (3) как скалярной функции переменных \mathbf{k}, \mathbf{k}' с помощью метода базисных спиноров [6] без использования каких-либо разложений по скоростям частиц, составляющих систему. Далее, используем интегрирование по угловым переменным β, φ , связанным с импульсами \mathbf{k} и \mathbf{k}' для получения радиального ядра потенциала:

$$V_{\lambda'_1, \lambda'_2; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k) = \int_{-1}^1 d(\cos \beta) \int_0^{2\pi} d\varphi D_{\lambda, \lambda'}^J(\varphi, \beta, -\varphi) V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}; \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}(k', k). \quad (11)$$

Последний шаг состоит в суммировании с целью получения ядер потенциала для различных наборов квантовых чисел J, L, S в "L-S" схеме.

Ядро фермион-фермионной системы в "L-S" базисе для произвольного полного углового момента J после точного вычисления спинорной части методом базисных спиноров (см. [6, 7]) запишется в виде:

$$\begin{aligned} V_{L',S',L,S}^J(k', k) &= \\ &= \frac{\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_{k_1,2}, \lambda_{p_1,2}=-1}^1 \langle 1/2 \lambda_{k_1}/2, 1/2 - \lambda_{k_2}/2 | S\lambda \rangle \times \\ &\times \langle L 0, S\lambda | J\lambda \rangle \langle S'\lambda' | 1/2 \lambda_{p_1}/2, 1/2 - \lambda_{p_2}/2 \rangle \langle J'\lambda' | L' 0, S'\lambda' \rangle \times \\ &\times (-1) \frac{Z\alpha}{4\pi} \left(\sum_{i=I,II,III,IV} V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i + V_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}; \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^{(B)} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где составные части $V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i(k, k')$ представляют собой комбинацию функций

$\tilde{R}_L^{(v)}(k, k')$ и $\tilde{U}_\ell^{(v)}(k', k)$. Эти функции выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell^{(v)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^\ell(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad \tilde{U}_\ell^{(v)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^\ell(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^4} dx \quad (13)$$

с подинтегральными функциями, зависящими только от формфакторов $\Pi(\alpha, q^2)$, $F_{1,2}^{e,p}(q^2)$ (например, $K^{(1)}(\tilde{q}^2) = \Pi(\alpha, q^2) G_M^p(q^2) G_M^e(q_1^2)$).

Функция $\tilde{R}_\ell(k', k)$ представима в виде суммы, слагаемые которых пропорциональны вкладам в потенциал диаграмм с фермионной петлей и обменом фотоном между электронами, а также поправок, связанных со структурой протона:

$$\tilde{R}_\ell^{(I)}(k', k) = \mu_p \left[\tilde{Q}_\ell(k', k) + \tilde{\Pi}_\ell(k', k) + \tilde{F}_{1,\ell}^e(k', k) + \tilde{F}_{2,\ell}^e(k', k) + \mu_p \tilde{G}_{D,\ell}^p(k', k) \right] \equiv \mu_p A_\ell(k', k) + \mu_p \tilde{G}_{D,\ell}^p(k', k), \quad (14)$$

$$\tilde{R}_\ell^{(II)}(k', k) = \mu_p \tilde{F}_{2,\ell}^e(k', k) \equiv \mu_p S_\ell(k', k), \quad (15)$$

$$\tilde{R}_\ell^{(III)}(k', k) = \kappa_p A_\ell(k', k) + \kappa_p \tilde{F}_{D,\ell}^p(k', k), \quad \tilde{R}_\ell^{(IV)}(k', k) = \kappa_p S_\ell(k', k). \quad (16)$$

Аналогичную структуру имеют функции $\tilde{U}_\ell(k', k)$. Функции, входящие в (14)-(16) определены следующим образом:

$$\tilde{Q}_\ell(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad \tilde{\Pi}_\ell(k', k) = \int_{-1}^1 (\Pi(\alpha, q^2) - 1) \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad (17)$$

$$\tilde{F}_{1,2,\ell}^e(k', k) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F_{1,2}^{e,p}(q^2) P_\ell(x)}{q^2} dx. \quad (18)$$

Вклад структурных поправок нуклона, определяется слагаемыми

$$\tilde{G}_{D,\ell}^p(k', k) = \int_{-1}^1 \left(\frac{G_M^p(q^2)}{\mu_p} - 1 \right) \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad (19)$$

$$\tilde{F}_{D,\ell}^p(k', k) = \int_{-1}^1 \left(\frac{F_2^p(q^2)}{\kappa_p} - 1 \right) \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad (20)$$

где μ_p и κ_p — магнитный и аномальный магнитный моменты протона.

Слагаемые, определяющие функции $\tilde{U}_\ell^{I-IV}(k', k)$, получаются заменой в подинтегральных выражениях (17)-(20) знаменателя q^2 на q^4 . Отметим, что ядро для двухфермионных систем с использованием импульсного представления в таком виде получено впервые. Также заметим, что чаще всего (см. [2, 3]) исследования такого рода систем в различных моделях связанных состояний проводились в координатном представлении.

2.1 Интегрирование по угловым переменным

Заключительный шаг в определении ядра уравнения релятивистской связанной системы состоит в вычислении интегралов (13). Найти все аналитические выражения для интегралов типа (13) с точным видом формфакторов в самом общем случае практически невозможно. Однако для частных значений параметра ℓ многие интегралы вычисляются аналитически и при этом не используется разложение по величине q^2 . В этом случае появляется возможность оценить эффекты, связанные с эффектами высоких q^2 .

Несложно найти функции \tilde{Q}_ℓ и \tilde{q}_ℓ с произвольным ℓ :

$$\tilde{Q}_\ell(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{P_\ell(x)}{q^2} dx = (-1) \frac{Q_\ell(z)}{k' k}, \quad \tilde{q}_\ell(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{P_\ell(x)}{q^4} dx = -\frac{Q'_\ell(z)}{2 k'^2 k^2}, \quad (21)$$

где $Q_\ell(z)$ — полиномы Лежандра 2-го рода, а производная берется по аргументу z .

Непосредственное интегрирование для $\tilde{\Pi}_\ell(k', k)$ (см. (17) и (5))

$$\tilde{\Pi}_\ell(k', k) = \frac{\alpha}{3 \pi k k'} [X_\ell(z(k', k), x=1) - X_\ell(z(k', k), x=-1)], \quad (22)$$

приводит нас к результату

$$\tilde{\Pi}_\ell(k', k) = \frac{\alpha}{3 \pi k k'} [X_\ell(z(k', k), x=1) - X_\ell(z(k', k), x=-1)]. \quad (23)$$

В частности, для $\ell = 0$ имеем, что

$$X_{\ell=0}(z, x) = \operatorname{arcth}^2(b) + \frac{1}{3 b^2} \left[b^2 - 1 + \left(\frac{1}{b} - 6 b \right) \operatorname{arcth}(b) \right], \quad (24)$$

где

$$b \equiv b(x) = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 + 4m_e^2}} = \sqrt{\frac{k k' (z - x)}{m_e^2 + k k' (z - x)}} \quad (25)$$

Аналогичную процедуру вычислений, несложно проделать и для остальных функций. Так, для паулиевского формфактора электрона (7) имеем, что

$$\tilde{F}_{2, \ell=0}^e(k', k) = -\frac{\alpha}{2 \pi k' k} \left\{ Q_0(z) + \frac{\operatorname{arcth}(b)}{b} \Big|_{-1}^1 \right\}. \quad (26)$$

3. Оценка релятивистских вкладов

Как правило, при вычислении энергетических поправок водородоподобных систем используется разложение потенциала $\sim k^2/m^2$ (см. обзор [2]). Включение слагаемых более высокого порядка, чем $\mathcal{O} \sim k^2/m^2$, при разложении по скоростям фермионов приводит к сложностям, а именно, при вычислениях релятивистских поправок появляются расходящиеся интегралы за счет высоких степеней k . Поэтому для исследования релятивистских вкладов более высокого порядка воспользуемся точным выражением для ядра интегрального уравнения (1). Ядро потенциала (12) было получено без всяких допущений относительно скоростей фермионов и величины

q^2 , а следовательно, мы имеем приемлемый способ анализа релятивистских вкладов более высокого порядка, чем k^2/m^2 .

Для численных расчетов используем значения фундаментальных физических констант, взятые из [8], а в качестве примера вычислений рассмотрим вклады поляризации вакуума и форм-фактора Паули $F_{e(q^2)}^2$.

3.1 Вклады поляризации вакуума в однопетлевом приближении

Рассмотрим релятивистские дополнительные вклады к энергии для $1s$ и $2s$ состояний водородоподобных систем, которые связаны с поляризацией вакуума за счет электрон-позитронной петли.

Поправки лидирующего вклада точно вычислены для некоторых наборов квантовых чисел системы. Для такого расчета необходимо использовать точное выражение (23). Такая задача решалась во многих работах (см. обзор [2]), в основном для мюонного водорода ($\mu - p$ система), где разложение по q^2 является неприемлемым и соответственно использование приближенного выражения дает явно неверный ответ (см., [9]).

Использование вариационного метода с кулоновскими функциями $\tilde{R}_{n\ell}^C(k, \beta)$ (10) и функцией \tilde{P}_ℓ (23) приводит к поправкам в виде

$$\Delta E_{1-loop}^{LC}(1s) = -\frac{\mu_{red} (Z\alpha)^2 \alpha}{18\pi\beta_1^3} \times \left[\frac{6(2\beta_1^4 - \beta_1^2 - 4) \arccos \beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} + (9\pi\beta_1^2 - 22\beta_1^3 - 24\beta_1 + 12\pi) \right], \quad (27)$$

$$\Delta E_{1-loop}^{LC}(2s) = \frac{\mu_{red} (Z\alpha)^2 \alpha}{18\pi\beta_1^3} \frac{1}{(4 - \beta_1^2)^{5/2}} \left[\sqrt{4 - \beta_1^2} \times \right. \\ \left. \times (2688\beta_1 - 3\pi(\beta_1^2 - 4)^2(56 + 3\beta_1^2) + \beta_1^3[7\beta_1^2(7 + \beta_1^2) - 1088]) - \right. \\ \left. - 3 \arccos(\beta_1/2)(\beta_1^8 - 10\beta_1^6 - 300\beta_1^4 + 2048\beta_1^2 - 3584) \right], \quad (28)$$

где $\beta_1 = \mu_{red}Z\alpha/m_1$, μ_{red} — приведенная масса. Выражения (27) и (28) будут использованы в качестве теста по оценке точности вычисления релятивистских поправок с помощью используемой в этой работе методики.

Релятивистские вклады высоких порядков Δ_{1-loop}^{HO} будем оценивать по разнице между вкладом ΔE_{1-loop}^{Rel} , рассчитанным посредством точного выражения с потенциалом (12) и уравнениями (27), (28), дающими лидирующий вклад с точным $\tilde{P}_\ell(k', k)$ т. е.

$$\Delta_{1-loop}^{HO} = \Delta E_{1-loop}^{Rel} - \Delta E_{1-loop}^{LC}(nS). \quad (29)$$

В таблице 1 представлены расчеты энергетических сдвигов для атома водорода, в том числе и с учетом релятивистских поправок высоких порядков. При вычислении ΔE_{1-loop}^{Rel} учитывалась ошибка, связанная с точностью интегрирования и которая была оценена по тестовому вычислению поправок $\Delta E_{1-loop}^{LC}(nS)$ путем численного расчета двумерного интеграла в импульсном пространстве, а также ошибка, определяемая экспериментальными неопределенностями фундаментальных констант.

Table 1: Поправки, связанные с электрон-позитронной однопетлевой поляризацией вакуума и рассчитанные в приближении k^2/m^2 (ΔE_{1-loop}), лидирующего вклада ΔE_{1-loop}^{LC} (nS) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков ΔE_{1-loop}^{Rel} для атома водорода ($e - p$ система) (в кГц).

n	ΔE_{1-loop}	ΔE_{1-loop}^{LC} (nS)	ΔE_{1-loop}^{Rel}	Δ_{1-loop}^{HO} , кГц
1	-216675.846	-214751.238	$-214027.933 \pm 1.027 \pm 0.004$	723.305
2	-27084.481	-26843.677	$-26754.973 \pm 2.098 \pm 0.0005$	88.704

Из данных таблицы 1 следует, что лидирующий вклад ΔE_{1-loop}^{LC} (nS) (уравнения (27) и (28)) дает 0.89 % по отношению к вкладу с оператором поляризации вакуума в приближении малых q^2 как для $1s$, так и $2s$ -состояния соответственно. Дополнительный вклад Δ_{1-loop}^{HO} к поправкам (27) и (28), связанный с релятивистским движением электрона и протона, составляет 723 ± 2 и 89 ± 3 килоГерц (последняя колонка в таблице 1). Поскольку экспериментальная точность интервала ($1s - 2s$) составляет порядка 10^{-2} кГц, и естественно эти поправки необходимо учитывать при вычислении энергетических уровней. Отметим, что расчет таких вкладов проведен впервые.

В таблице 2 представлены аналогичные таблице 1 результаты вычислений для мюонного водорода. Как следует из данных таблицы 2, релятивистские

Table 2: Поправки, связанные с электрон-позитронной однопетлевой поляризацией вакуума и рассчитанные в приближении k^2/m^2 (ΔE_{1-loop}), соотношений (27),(28) (ΔE_{1-loop}^{LC} (nS)) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков ΔE_{1-loop}^{Rel} для мюонного водорода ($\mu - p$ система) (в миллиэВ).

n	ΔE_{1-loop}	ΔE_{1-loop}^{LC} (nS)	ΔE_{1-loop}^{Rel}	Δ_{1-loop}^{HO} , миллиэВ
1	-5760.8813	-1898.8296	$-1898.9331 \pm 0.0004 \pm 0.0003$	-0.1035
2	-720.1102	-219.5840	$-219.5975 \pm 0.00005 \pm 0.00004$	-0.0135

поправки играют принципиальную роль. Дополнительные к лидирующему вкладу ΔE_{1-loop}^{LC} (nS) релятивистские поправки, рассчитанные с помощью точного выражения для потенциала взаимодействия, составляют -0.1035 и -0.0135 миллиэВ.

Таким образом, точное вычисление релятивистских поправок, связанных с движением фермионов, составляющих систему, играет важную роль для согласования теоретических расчетов с экспериментальными данными, как для атома водорода, так и для $\mu - p$ системы.

3.2 Вклад форм-фактора Паули $F_2^e(q^2)$

Для расчетов вкладов структуры электрона (мюона) за счет форм фактора Паули $F_2^e(q^2)$ введем поправку, связанную с лидирующим вкладом

$$\Delta E_{F_2^e}^{LC}(nS) = \int_0^\infty \int_0^\infty dk dk' \bar{R}_{n\ell=0}^C(k, \beta) \bar{R}_{n\ell=0}^C(k', \beta) k'^2 k^2 \times \\ \times \frac{Z\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{2\mu_p}{(4S-1)m_1 m_2} \right) \left[2k'k \bar{F}_{2,\ell=1}^e(k', k) - (k'^2 + k^2) \bar{F}_{2,\ell=0}^e(k', k) \right], \quad (30)$$

и аналогично поправку $\Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}}$, но с потенциалом (12) без разложения по степеням k^2/m^2 .

Оценку вкладов высших релятивистских порядков, связанных с движением фермионов системы, проделаем с помощью величины:

$$\Delta E_{F_2^e}^{\text{HO}} = \Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}} - \Delta E_{F_2^e}^{\text{LC}}(nS). \quad (31)$$

Процедура численного расчета для атома водорода приводит к результатам, представленным в таблице 3. Как следует из таблицы, использование точного

Table 3: Поправки, связанные внутренней структурой электрона за счет F_2^e и рассчитанные в приближении k^2/m^2 ($\Delta E_{F_2^e}$), (30) ($\Delta E_{F_2^e}^{\text{LC}}(nS)$) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков $\Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}}$ ((31)) для атома водорода (в кГц)

n	$\Delta E_{F_2^e}$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{LC}}(nS)$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}}$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{HO}}$, кГц
1	405031.32	400433.84	396618.00	-3815.84
2	50628.91	50053.57	49575.72	-477.85

выражения для форм-фактора $F_2^e(q^2)$, как и релятивистские эффекты высоких порядков, приводят к уменьшению (по отношению к нерелятивистскому) вкладов, связанных с аномальным магнитным моментом электрона. Полный эффект, связанный с включением высоких q^2 и релятивистского движения частиц системы, составляет -8413.32 кГц -1053.196 кГц или 2.08% для $1s$ и $2s$ -состояний. Безусловно, такие вклады играют важную роль в теоретических вычислениях сдвигов атома водорода.

Результаты для мюонного атома водорода, отображенные в таблице 4, также подтверждают необходимость учета такого рода поправок и для этой системы. Полный

Table 4: Поправки, связанные внутренней структурой электрона за счет F_2^e и рассчитанные в приближении k^2/m^2 ($\Delta E_{F_2^e}$), (30) ($\Delta E_{F_2^e}^{\text{LC}}(nS)$) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков $\Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}}$ ((31)) для мюонного атома водорода (в миллиэВ).

n	$\Delta E_{F_2^e}$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{LC}}(nS)$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{Rel}}$	$\Delta E_{F_2^e}^{\text{HO}}$, миллиэВ
1	0.0937	0.0928	0.0920	-0.0008
2	0.0117	0.0116	0.0115	-0.0001

вклад этих поправок, как и в случае атома водорода, составляют по отношению нерелятивистскому вкладу около 2% или -0.0018 миллиэВ и -0.0002 миллиэВ соответственно для $1s$ и $2s$ -состояний.

4. Поправки к сверхтонкому расщеплению

Как видим, представленная методика, использующая потенциал взаимодействия фермионов (12), позволяет вычислять эффекты как высоких порядков k/m , так и анализировать вклады, связанные q^2 в форм-факторных функциях. Рассчитаем новые вклады к сверхтонкому расщеплению атома водорода и мюонному атома с

использованием выражения, которое получается для разницы потенциалов триплетного и синглетных состояний:

$$V_{L=0}^{J=1}(k', k) - V_{L=0}^{J=0}(k', k) = -\frac{8\mu_p}{3m_1 m_2} [(k^2 + k'^2) A_0(k', k) - 2kk' A_1(k', k)] . \quad (32)$$

Актуальность такой задачи состоит в том, что до настоящего времени существует разница между измеренным с довольно большой точностью значением сверхтонкого расщепления $1s$ состояния атома водорода 1420405.7517667 кГц и рассчитанным с учетом электродинамических поправок теоретическим значением $\Delta E_{\text{теор}} = 1420452.04$ кГц. Эту разницу в настоящее время объясняют за счет эффектов, связанных со структурой протона (см. [2, 10]).

Поправки, индуцируемые форм-фактором $F_2^e(q^2)$, как правило, оценивают в приближении малых q^2 . Для оценки более высоких q^2 приходится использовать достаточно сложную процедуру регуляризации, возникающих при разложении $F_2^e(q^2)$ (см.(7)) интегралов [11]. В данной методике для вычисления эффекты более высоких q^2 представим форм фактор Паули в виде суммы:

$$F_2^e(q^2) = F_2^e(0) + [F_2^e(q^2) - F_2^e(0)] = F_2^e(0) + \Delta F_2^e(q^2) , \quad (33)$$

где слагаемое в квадратных скобках и будет определять необходимый вклад. Для расчетов, с использованием (32) необходимы функции $\widetilde{\Delta F}_{2,\ell}^e(k', k)$. Явный вид этих функций для $\ell = 0, 1$ несложно найти без использования каких-либо допущений аналогично (22)).

$$\begin{aligned} A_0(k', k) &= \widetilde{\Delta F}_{2,\ell=0}^e(k', k) = -\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{1}{k'k} \frac{\text{arcth}(b(x))}{b(x)} \Big|_{-1}^1 \\ A_1(k', k) &= \widetilde{\Delta F}_{2,\ell=1}^e(k', k) = -\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{1}{k'k} \times \\ &\times \left[1 + \frac{z \text{arcth}(b(x))}{b(x)} + \frac{m_1^2 \text{arcth}^2(b(x))}{k'k} \right] \Big|_{-1}^1 , \end{aligned} \quad (34)$$

где $z = 1/2(k'/k + k/k')$.

Двумерные интегралы типа (9) с потенциалом (32) и функциями (34) сходятся для s состояний и, следовательно, могут быть вычислены с высокой точностью. В итоге поправка к сверхтонкому расщеплению для $1s$ и $2s$ состояний атома водорода составляет -18.705 кГц и -2.341 кГц соответственно.

Аналогичная процедура для оценки вклада, который определяется с помощью функции $\Pi_{\ell=0,1}(k', k)$ (см.(24)) и связан с электрон-позитронной поляризацией вакуума, приводит к значениям 28.18 кГц и 3.53 кГц для $1s$ и $2s$ состояний.

В таблице 5 представлены современные значения поправок к сверхтонкому расщеплению $1s$ состояния атома водорода. Как следует из таблицы 5, включение рассчитанных здесь дополнительных вкладов улучшает согласование между экспериментальным и теоретическим значением. При этом подтверждается вывод работы [12], состоящий в том, что только за счет поправок, связанных с электромагнитной структурой протона объяснить разницу между экспериментальным значением и теоретическими расчетами нельзя. Однако не следует думать, что практически полное совпадение является окончательным результатом, поскольку необходим точный учет вклада поляризуемости протона и квантово-электродинамических поправок высоких порядков.

Table 5: Сверхтонкое расщепление $1s$ состояния для атома водорода.

	E^{HFS} , кГц
Квантово-электродинамические вклады (без учета отдачи протона) [2]	1420452.04
Поправки, индуцируемые структурой протона [2, 12]	-62.29 ± 1.22
Дополнительный вклад от $F_2^e(q^2)$	-18.71
Вклад поляризации вакуума	28.18
Вклады отдачи, связанные с двухфотонным обменом [2]	8.06
Другие поправки [2]	0.35
Всего	1420407.63 ± 1.22
Эксперимент	1420405.7517667
Разница	1.88 ± 1.22

Заключение

Таким образом, в данной работе в рамках пуанкаре-ковариантной модели получено ядро интегрального уравнения системы с электромагнитным взаимодействием. Наличие ядра с точно вычисленной спинорной частью лежит в основе разработанной методики, которая позволяет проводить с высокой точностью вычисление энергетических поправок, обусловленных релятивистским движением и структурными свойствами частиц системы, а также квантовоэлектродинамическими эффектами. Результаты вычислений показали важность учета релятивистских эффектов высшего порядка, как для атома водорода, так и для $\mu - p$ -системы с точки зрения современных экспериментальных измерений.

Разработанная схема вычислений применительно к сверхтонкому расщеплению атома водорода позволила провести расчет дополнительных вкладов, связанных с поляризацией вакуума и формфактором Паули электрона $F_2^e(q^2)$. Учет этих вкладов улучшил согласование теоретических расчетов и современных экспериментальных данных. Достоверность результатов, полученных в рамках пуанкаре-ковариантной модели водородоподобных систем, подтверждается тем, что в ней воспроизведены все известные аналитические результаты энергетических вкладов, как для случая малых квадратов переданных импульсов, так и для случая нерелятивистского движения фермионов.

Abstract. Poincaré covariant model of hydrogen-like systems and relativistic effects of higher orders are considered in the paper. Relativistic energy effects of hydrogen-like systems are calculated in the framework of Poincaré covariant quark model based on point form of relativistic Hamiltonian dynamics. New energy contributions to hyperfine splitting of hydrogen which are connected with Pauli form factor of electron and e^+e^- vacuum polarization are presented.

Литература

1. Phase-Coherent Measurement of the Hydrogen $1S - 2S$ Transition Frequency with an Optical Frequency Interval Divider Chain / T. Udem, A. Huber, B. Gross [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* "— Oct 1997. "— Vol. 79, № 14. "— P. 2646–2649.
2. Eides, M. I. Theory of light hydrogenlike atoms / M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto // *Phys. Rept.* "— 2001. "— Vol. 342. "— P. 63–261.
3. Faustov, R. N. Muonic hydrogen ground state hyperfine splitting. [Electronic resource] / R. N. Faustov, A. P. Martynenko. "— 2003. —Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0312116>. — Date of access: 14.01.2008.
4. Karshenboim, S. G. Hadronic vacuum polarization contribution to the muonium hyperfine splitting / S. G. Karshenboim, V. A. Shelyuto // *Phys. Lett.* "— 2001. "— Vol. B517. "— P. 32–36.
5. Lucha, W. Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupprecht, F. F. Schoberl // *Phys. Rev.* "— 1991. "— Vol. D44. "— P. 242–249.
6. Андреев, В. В. Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В. В. Андреев. "— Гомель: УО "Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины", 2004. "— 235 с.
7. Андреев, В. В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В. В. Андреев // *Ядерная физика.* "— 2003. "— Т. 66, № 2. "— С. 410–420.
8. Review of Particle Physics / W.-M. Yao, C. Amsler, D. Asner [et al.] // *Journal of Physics G.* "— 2006. "— Vol. 33. "— P. 1.
9. Martynenko, A. P. $2S$ hyperfine splitting of muonic hydrogen / A. P. Martynenko // *Phys. Rev.* "— 2005. "— Vol. A71. "— P. 022506.
10. Karshenboim, S. G. Precision physics of simple atoms: QED tests, nuclear structure and fundamental constants / S. G. Karshenboim // *Phys. Rept.* "— 2005. "— Vol. 422. "— P. 1–63.
11. Complete two-loop correction to the bound-electron g factor / K. Pachucki, A. Czarnecki, U. D. Jentschura, V. A. Yerokhin // *Phys. Rev.* "— 2005. "— Vol. A72. "— P. 022108.
12. Blunden, P. G. Proton radii and two-photon exchange / P. G. Blunden, I. Sick // *Phys. Rev.* "— 2005. "— Vol. C72. "— P. 057601.