

К теории частично насыщенных формаций

А. И. РЯВЧЕНКО

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология работы А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [1] и монографий [2–4].

Понятие \mathfrak{H} -дефекта насыщенной формации впервые было введено в работе А.Н.Скибы и Е.А.Таргонского [5]. Под \mathfrak{H} -дефектом насыщенной формации \mathfrak{F} понимают длину решетки насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и \mathfrak{F} . В этой же работе была получена классификация насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2 . В дальнейшем этот результат нашел применение в различных теоретических исследованиях, среди которых отметим следующие два направления: с одной стороны, в качестве \mathfrak{H} стали рассматривать достаточно хорошо известные формации, с другой, — исследовались насыщенные и частично насыщенные формации \mathfrak{H} -дефекта больших размерностей.

Обобщая результаты работ [5–9], автор [10] получил классификацию ω -насыщенных формаций \mathfrak{H}^ω -дефекта 1, где в качестве \mathfrak{H} рассматривалась произвольная формация классического типа. Используя данный результат, в теоремах 1 и 2 мы даем описание ω -насыщенных формаций \mathfrak{H}^ω -дефекта 2.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа, \mathfrak{F} — приводимая ω -насыщенная формация. В точности тогда \mathfrak{H}^ω -дефект приводимой ω -насыщенной формации \mathfrak{F} равен 2, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2$, где \mathfrak{M} — некоторая ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{H} , а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 — различные минимальные ω -насыщенные не \mathfrak{H} -формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1$, где \mathfrak{M} — некоторая ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{H} , а \mathfrak{H}_1 — неприводимая ω -насыщенная формация с \mathfrak{H}^ω -дефектом 2.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{F} — неприводимая ω -насыщенная формация, \mathfrak{M} — ее максимальная ω -насыщенная подформация, M — канонический ω -локальный спутник формации \mathfrak{M} , \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа. Пусть \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, тогда $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$, где G — такая монолитическая группа с циклом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$, G — \mathfrak{M} -базисная группа и $l^\omega \text{form}(G/P)$ — ω -насыщенная формация \mathfrak{H}^ω -дефекта 1, либо $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$ и выполняется одно из условий:

1) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — p -группа, H — $M(p)$ -базисная группа и $l^\omega \text{form} H$ имеет \mathfrak{H}^ω -дефект ≤ 1 ;

2) P — неабелева группа, G — $M(p)$ -базисная группа для любого $p \in \pi(P) \cap \omega$ и $l^\omega \text{form} G/P$ — ω -насыщенная формация \mathfrak{H}^ω -дефекта 1.

Еще одним примером перспективности применения результатов работы [10] для изучения внутреннего строения ω -насыщенных формаций может служить сформулированная ниже теорема 3. В частности, в теореме 3 дано описание структурного строения ω -насыщенной формации \mathfrak{F} , у которой решетка всех ω -насыщенных подформаций, заключенных между \mathfrak{F} и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ (где \mathfrak{H} — разрешимая формация классического типа), является булевой.

Теорема 3. Пусть \mathfrak{H} — некоторая разрешимая формация классического типа, \mathfrak{F} — ω -насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) решетка ω -насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является булевой;
- 2) решетка ω -насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями;
- 3) формация \mathfrak{F} представима в виде $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega} \mathfrak{H}_i | i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i | i \in I\}$ — множество всех минимальных ω -насыщенных не \mathfrak{H} -подформаций формации \mathfrak{F} .

1. Определения и предварительные результаты

Напомним некоторые определения и обозначения. Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел. Тогда через ω' обозначают дополнение к ω во множестве всех простых чисел.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют ω -локальным спутником. Если f — произвольный ω -локальный спутник, то через $LF_{\omega}(f)$ обозначается следующий класс групп: $\{G | G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G , у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K) \cap \omega \neq \emptyset$, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G .

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторого ω -локального спутника f , то говорят, что \mathfrak{F} является ω -локальной формацией, а f ее ω -локальный спутник. Если при этом все значения f лежат в \mathfrak{F} , то f называют внутренним ω -локальным спутником.

Формация \mathfrak{F} называется ω -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G , удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \in \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$.

Ввиду теоремы 1 [1, с. 118] непустая формация является ω -локальной тогда и только тогда, когда она является ω -насыщенной.

Формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется формацией классического типа, если для любого простого p формация $f(p)$ либо насыщена, либо содержится в классе абелевых групп.

Через l^{ω} обозначают совокупность всех ω -насыщенных формаций. Полагают $l^{\omega}\text{form}\mathfrak{F}$ равным пересечению всех тех ω -насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп \mathfrak{F} .

Пусть \mathfrak{X} — произвольная совокупность групп и p — простое число. Тогда полагают, что

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \text{form}(G/F_p(G) | G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Для любых двух ω -насыщенных формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} полагают $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H} = l^{\omega}\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Всякое множество ω -насыщенных формаций, замкнутое относительно операций \wedge и \vee^{ω} , является решеткой. Таковым, например, является множество l^{ω} всех ω -насыщенных формаций.

Через $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку ω -насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и \mathfrak{F} . Длину решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^{\omega}$ и называют ω -насыщенным \mathfrak{H} -дефектом формации \mathfrak{F} или \mathfrak{H}^{ω} -дефектом формации \mathfrak{F} .

ω -Насыщенная формация \mathfrak{F} называется минимальной ω -насыщенной не \mathfrak{H} -формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω -насыщенные подформации из \mathfrak{F} содержатся в \mathfrak{H} .

ω -Насыщенная формация \mathfrak{F} называется неприводимой, если она не может быть представлена в виде решеточного объединения некоторых своих собственных ω -насыщенных подформаций в решетке l^{ω} .

Группа $G \in \mathfrak{F}$ называется критической, если G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ для некоторых формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{M} .

Критическая группа $G \in \mathfrak{F}$ называется \mathfrak{H} -базисной, если у формации, ею порожденной, имеется лишь единственная максимальная подформация \mathfrak{M} , причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

В ограниченной решетке L элемент a называется дополнением элемента b , если $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Дополнение элемента a также обозначают a' .

Пусть $a \in [b, c]$, тогда элемент x называется относительным дополнением элемента a в интервале $[b, c]$, если $a \wedge x = b$ и $a \vee x = c$.

Ограниченная решетка, в которой каждый элемент имеет дополнение, называется решеткой с дополнениями.

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

Пусть L — полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется компактным в L , если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leq \vee X$ следует $a \leq \vee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$.

Полная решетка называется алгебраической, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Для доказательства основных результатов работы нам будут необходимы следующие известные факты.

Лемма 1[10]. Пусть \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа, \mathfrak{F} — некоторая ω -насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}$, где \mathfrak{M} — ω -насыщенная \mathfrak{H} -подформация формации \mathfrak{F} , \mathfrak{H}_1 — минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -подформация формации \mathfrak{F} , при этом:

1) всякая ω -насыщенная \mathfrak{H} -подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \vee^\omega (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω -насыщенная не \mathfrak{H} -подформация \mathfrak{F}_1 из \mathfrak{F} имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Лемма 2. Пусть \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{M}$, где \mathfrak{H}_1 — минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -формация, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда если \mathfrak{F} — ω -насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{K}$, то в \mathfrak{F} существует по крайней мере одна минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{K} -формация.

Леммы 3 и 4 являются частными случаями соответственно лемм 5.2.7 и 5.2.8 [2, с. 193, 194].

Лемма 3. Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{F} и \mathfrak{H} — ω -насыщенные формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $|\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}|^\omega \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^\omega$.

Лемма 4. Пусть \mathfrak{F} , \mathfrak{M} , \mathfrak{X} и \mathfrak{H} — ω -насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{X}$. Тогда если m , r и t — соответственно \mathfrak{H}^ω -дефекты формаций \mathfrak{M} , \mathfrak{X} и \mathfrak{F} и $m, r < \infty$, то $t \leq m + r$.

Лемма 5[1]. Если $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} \mathfrak{X}$ и f — минимальный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} , то справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = \text{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \text{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для все $p \in \omega$;

3) если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$ и p — некоторый фиксированный элемент из ω , то $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$, $f_1(p) = \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$ и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $\mathfrak{F} = LF_\omega(g)$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$ и $g(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.

Лемма 6[12]. Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta^\omega \subseteq \Theta$. Пусть \mathfrak{H} — ω -насыщенная формация с каноническим ω -локальным спутником H , \mathfrak{F} — ω -насыщенная формация с минимальным ω -локальным Θ -значным спутником f . Тогда в том и только в том случае \mathfrak{F} — $\mathfrak{H}_{\Theta^\omega}$ -критическая формация, когда $\mathfrak{F} = \Theta^\omega \text{form} G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^\mathfrak{H}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$,

$\Phi(G) = 1$ и $f(p) - H(p)_{\Theta}$ -критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \emptyset$ и $f(\omega')$ - \mathfrak{H}_{Θ} -критическая формация.

Лемма 7[1]. Пусть f_i - такой внутренний ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_i , что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{F}_2 = LF_{\omega}(f)$, где $f = f_1 \vee f_2$.

Лемма 8[11]. Пусть \mathfrak{H} - некоторая формация классического типа, h - ее канонический ω -локальный спутник. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{F} является минимальной ω -локальной не \mathfrak{H} -формацией, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\text{form}G$, где G - такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$, либо $\pi \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = P$ - группа простого порядка;

(2) P - неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \pi$;

(3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ - p -группа, а H - такая монолитическая группа с цоколем $Q = H^{h(p)}$, что $p \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(H) = 1$ и $H^{h(q)} \subseteq H$, для любого $q \in \pi(Q)$, либо H - минимальная не $h(p)$ -группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q .

Лемма 9[13]. Пусть G - монолитическая группа с неабелевым цоколем R . Тогда если простое число p делит порядок группы R , то $F_p(G) = 1$.

Лемма 10[2, с. 41]. Пусть A монолитическая группа с неабелевым цоколем, \mathfrak{M} - некоторая полуформация и $A \in \text{form}\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.

Лемма 11[1]. Пусть $\mathfrak{F}_1 = LF_{\omega}(F_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = LF_{\omega}(F_2)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $F_1 \leq F_2$.

2. Основной результат

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{F} равен 2, \mathfrak{K} - такая максимальная ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{F} , что \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{K} равен 1. По лемме 1 формация \mathfrak{K} представима в виде $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}$, где \mathfrak{H}_1 - минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -формация, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Если в \mathfrak{F} имеется еще одна минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -подформация \mathfrak{H}_2 , отличная от \mathfrak{H}_1 , то $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2 \vee^{\omega} \mathfrak{M}$ и выполнено условие 1).

Пусть теперь в формации \mathfrak{F} нет отличных от \mathfrak{H}_1 минимальных ω -насыщенных не \mathfrak{H} -подформаций. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{K}$, то ввиду леммы 2 в формации \mathfrak{F} существует ω -насыщенная формация \mathfrak{L} - минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{K} -формация. По лемме 3 получаем, что \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{L} не больше 2.

Предположим, что если $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \vee^{\omega} (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$. Ввиду леммы 3 \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{F} не больше 1. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K}$. Тогда \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{L} отличен от 0.

Пусть \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{L} равен 1. Тогда ввиду нашего предположения в формации \mathfrak{L} нет отличных от \mathfrak{H}_1 минимальных ω -насыщенных не \mathfrak{H} -подформаций. По лемме 1 имеем $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})$. Но тогда $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$. Противоречие. Значит, \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{L} равен 2.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^{\omega} \mathfrak{K} = \mathfrak{L} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}) = \mathfrak{L} \vee^{\omega} \mathfrak{M}$, то есть формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию 2 теоремы.

Достаточность. Пусть выполнено условие 1) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2$, где \mathfrak{M} - некоторая ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{H} , а \mathfrak{H}_1 и \mathfrak{H}_2 - различные минимальные ω -насыщенные не \mathfrak{H} -формации. Тогда, применяя лемму 4, получаем, что \mathfrak{H}^{ω} -дефект формации \mathfrak{F} меньше или равен 2.

Предположим, что \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} строго меньше 2. В этом случае, ввиду леммы 3, получаем, что \mathfrak{H}^ω -дефект формации $\mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2$ строго меньше 2. Противоречие. Следовательно, \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 2.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1$, где \mathfrak{M} — некоторая ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{H} , а \mathfrak{H}_1 — неприводимая ω -насыщенная формация с \mathfrak{H}^ω -дефектом 2. Рассуждая аналогично случаю, рассмотренному выше и снова применяя леммы 3 и 4, опять получаем, что \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа с каноническим ω -локальным спутником h , \mathfrak{F} — неприводимая ω -насыщенная формация \mathfrak{H}^ω -дефекта 2, \mathfrak{M} — единственная максимальная ω -насыщенная подформация формации \mathfrak{F} с каноническим ω -локальным спутником M . Тогда \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{M} равен 1. Кроме того, \mathfrak{F} является минимальной ω -насыщенной не \mathfrak{M} -формацией.

По лемме 5 формации \mathfrak{F} и \mathfrak{M} имеют такие минимальные внутренние ω -локальные спутники f и m соответственно, что

$$f(a) = \begin{cases} \text{form}(A/F_a(A)|A \in \mathfrak{F}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}), \\ \mathfrak{F}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \emptyset, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F}); \end{cases}$$

и

$$m(a) = \begin{cases} \text{form}((A/F_a(A)|A \in \mathfrak{M}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ \mathfrak{M}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \emptyset, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

В силу замечания 2 [1] $M(p) = \mathfrak{N}_{p,m}(p)$, для всех $p \in \omega$.

Применяя лемму 6, получаем, что $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form} G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$, $\Phi(G) = 1$ и $f(p) = \mathfrak{N}_{p,m}(p)$ -критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \emptyset$ и $f(\omega')$ — \mathfrak{M} -критическая формация.

Заметим также, что по лемме 1 имеем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee^\omega \mathfrak{K}$, где \mathfrak{M}_1 — минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -подформация формации \mathfrak{M} , $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$.

По лемме 5 формации \mathfrak{K} и \mathfrak{M}_1 имеют такие минимальные внутренние ω -локальные спутники k и m_1 соответственно, что

$$k(a) = \begin{cases} \text{form}(A/F_a(A)|A \in \mathfrak{K}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{K}), \\ \mathfrak{K}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \emptyset, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{K}); \end{cases}$$

и

$$m_1(a) = \begin{cases} \text{form}((A/F_a(A)|A \in \mathfrak{M}_1), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \emptyset, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}_1). \end{cases}$$

Заметим также, что по лемме 7 справедливо равенство $m = m_1 \vee k$.

В силу леммы 8 имеем $\mathfrak{M}_1 = l^\omega \text{form} M$, где M — такая монолитическая группа с цоколем $L = M^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(L) \cap \omega = \emptyset$, либо $\pi \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

- (1) $M = L$ — группа простого порядка;
- (2) L — неабелева группа и $L = M^{h(l)}$ для любого $l \in \pi$;

(3) $M = [L]N$, где $L = C_M(L)$ — l -группа, а N — такая монолитическая группа с цоколем $Q = N^{h(l)}$, что $l \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(N) = 1$ и $N^{h(q)} \subseteq Q$ для любого $q \in \pi(Q)$, либо N — минимальная не $h(l)$ -группа одного из следующих типов:

- а) циклическая примарная группа;
- б) группа кватернионов порядка 8;
- в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q .

Пусть $\pi \neq \emptyset$, $p \in \pi$. Допустим, что P — неабелев цоколь группы G . Тогда по лемме 9 имеем, что $F_p(G) = 1$ и $f(p) = \text{form}(G/F_p(G)) = \text{form}G$.

Пусть для формации \mathfrak{M}_1 выполнено условие (1). Тогда если $p \neq l$, то

$$m(p) = m_1(p) \vee k(p) = k(p)$$

и $f(p) = \text{form}G$ — минимальная ω -насыщенная не $\mathfrak{N}_p k(p)$ -формация для любого $p \in \pi$. Значит, любая собственная подформация из $f(p)$ содержится в $\mathfrak{N}_p k(p)$. Так как $m(p) \subseteq f(p)$, то получаем $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_p k(p)$. Противоречие. Поэтому $p = l$.

Но тогда опять получаем, что

$$\begin{aligned} m(p) &= m_1(p) \vee k(p) = \text{form}(M/F_p(M)) \vee k(p) = \\ &= \text{form}(M/M) \vee k(p) = (1) \vee k(p) = k(p) \end{aligned}$$

и в силу того, что $f(p) = \text{form}G$ — минимальная ω -насыщенная не $\mathfrak{N}_p k(p)$ -формация, получаем $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_p k(p)$. Противоречие. Следовательно, данный случай невозможен.

Пусть для формации \mathfrak{M}_1 выполнено условие (2). Тогда

$$m(p) = m_1(p) \vee k(p) = \text{form}(M/F_p(M)) \vee k(p) = \text{form}(M) \vee k(p).$$

Покажем, что $\pi(P) \cap \omega \subseteq \pi(L) \cap \omega$. Предположим, что существует $r \in \omega \cap (\pi(P) \setminus \pi(L))$. Тогда

$$m(r) = m_1(r) \vee^\omega k(r) = \emptyset \vee^\omega k(r) = k(r).$$

Значит, $f(r) = \text{form}G$ — минимальная не $\mathfrak{N}_r k(r)$ -формация. Значит, любая собственная подформация из $f(r)$ содержится в $\mathfrak{N}_r k(r)$. Так как $m(r) \subseteq f(r)$, то получаем $m(r) \subseteq \mathfrak{N}_r k(r) \subseteq h(r)$. Полученное противоречие показывает, что $\pi(P) \cap \omega \subseteq \pi(L) \cap \omega$.

Используя леммы 3 и 1, можно показать, что G — $M(p)$ -базисная группа для любого $p \in \pi(P) \cap \omega$ и $l^\omega \text{form}G/P$ — ω -насыщенная формация \mathfrak{H}^ω -дефекта 1. Поэтому G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Случаи, когда формация \mathfrak{M}_1 удовлетворяет условию (3) и когда $\pi = \emptyset$, рассматриваются аналогично.

Пусть теперь P — абелева p -группа, $p \in \omega$. Тогда, поскольку \mathfrak{M} — ω -насыщенная формация и $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$, то $P \notin \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Поэтому $P = C_G(P) = O_p(G)$ и $G = [P]H$ для некоторой максимальной подгруппы группы G . Заметим, что $H \notin M(p)$, так как иначе $H \simeq G/O_p(G) \in M(p)$ и по лемме 10 имеем, что $G \in \mathfrak{M}$. Противоречие.

Так как \mathfrak{F} — неприводимая ω -насыщенная формация, а \mathfrak{M} — ее максимальная ω -насыщенная подформация, то любая ω -насыщенная подформация из \mathfrak{F} содержится в \mathfrak{M} . Ввиду леммы 11, получаем, что любая подформация из $\text{form}H$ содержится в $M(p)$. Значит, H является $M(p)$ -базисной группой. А поскольку P является \mathfrak{M} -корадикалом группы G , то $H \simeq G/P$ принадлежит формации \mathfrak{M} . Следовательно, формация $l^\omega \text{form}H$

имеет \mathfrak{H}^ω -дефект ≤ 1 . Таким образом, получаем, что группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь $\pi = \emptyset$. Тогда ω -насыщенная формация $f(\omega') = \text{form}(G/G_{\omega d}) = \text{form}G$ является \mathfrak{M} -критической, а G — \mathfrak{M} -базисная группа. Если предположить, что $G/P \in \mathfrak{H}$, то формация \mathfrak{F} , ввиду леммы 8, является минимальной ω -насыщенной не \mathfrak{H} -формацией. Поэтому \mathfrak{H}^ω -дефект формации \mathfrak{F} равен 1. Противоречие. Значит, $G/P \notin \mathfrak{H}$. Так как $G/P \in \mathfrak{M}$, то $l^\omega \text{form}(G/P)$ — ω -насыщенная формация \mathfrak{H}^ω -дефекта 1, и группа G удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Основные этапы доказательства теоремы 3 отражены в следующих леммах.

Лемма 12[4, с. 27]. *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

Лемма 13[4, с. 31]. *Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Ввиду замечания 3 работы [1] справедлива следующая

Лемма 14. *В однопорожденной ω -насыщенной формации содержится лишь конечное число разрешимых ω -насыщенных подформаций.*

Лемма 15[13]. *Любая модулярная решетка L с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.*

Лемма 16[4, с. 32]. *В решетке L конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент a является объединением содержащихся в нем атомов.*

Лемма 17. *Пусть \mathfrak{H} — некоторая разрешимая формация классического типа, \mathfrak{F} — произвольная ω -насыщенная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда и только тогда формация \mathfrak{M} — атом решетки $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, когда*

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \mathfrak{R},$$

где \mathfrak{R} — некоторая минимальная ω -насыщенная не \mathfrak{H} -подформация из \mathfrak{F} .

Лемма 18. *Пусть \mathfrak{H} — некоторая разрешимая формация классического типа. Тогда в каждой однопорожденной не \mathfrak{H} -формации содержится лишь конечное множество ω -насыщенных подформаций с ω -насыщенным \mathfrak{H} -дефектом 1.*

Лемма 19. *Пусть \mathfrak{H} — некоторая формация классического типа, \mathfrak{F} — ω -насыщенная формация. Тогда*

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \vee^\omega (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \mid \mathfrak{M} \subseteq \Omega(\mathfrak{F})),$$

где $\Omega(\mathfrak{F})$ — множество всех ω -насыщенных подформаций формации \mathfrak{F} .

Лемма 20. *Пусть \mathfrak{H} — некоторая разрешимая формация классического типа, \mathfrak{F} — однопорожденная ω -насыщенная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент \mathfrak{M} решетки $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем, т.е.*

$$\mathfrak{M} = \vee^\omega ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \mathfrak{H}_i \mid i \in I) = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega (\vee^\omega \mathfrak{H}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных ω -насыщенных не \mathfrak{H} -подформаций, содержащихся в \mathfrak{M} .

Лемма 21. *Пусть \mathfrak{H} — некоторая разрешимая формация классического типа, \mathfrak{F} — некоторая ω -насыщенная формация ($\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$), и пусть $\Sigma = \{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — некоторый набор атомов решетки $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{M} = \vee^\omega (\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$.*

Тогда если \mathfrak{K} — элемент решетки $\mathfrak{M}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то в Σ найдется такой набор атомов $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, что $\mathfrak{K} = \vee^\omega (\mathfrak{M}_j \mid j \in J)$.

Abstract. In this paper we obtained the description of ω -saturated formations of finite groups with \mathfrak{H}^ω -defect 2 for any classical type formation \mathfrak{H} . We give the description of a ω -saturated formation \mathfrak{F} with boolean sublattice of ω -saturated subformations.

Литература

1. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114–147.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Минск : Беларуская навука. 1997. — 240 с.
3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М., 1989. — 256 с.
4. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984. — 568 с.
5. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Матем. заметки — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 490–499.
6. Джарадин, Джехад Минимальные p -насыщенные нильпотентные формации / Джарадин Джехад // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. — 1995. — Вып. 8. — С. 59–64.
7. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным \mathfrak{H} -дефектом / В.В. Аниськов // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 1997. — № 4. — С. 65–68.
8. Жевнова, Н.Г. ω -Локальные формации с булевой решеткой ω -локальных подформаций / Н.Г. Жевнова // Доклады НАН Беларуси. — 1997. — Т. 41, № 5. — С. 15–19.
9. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с \mathfrak{X} -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2008. — № 1. — С. 28–34.
10. Рябченко, А.И. О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Изв. Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. — 2008., — № 5(50)., ч.2, — С. 216–222.
11. Сафонова, И.Н. О минимальных ω -локальных не \mathfrak{H} -формациях / И.Н. Сафонова // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 1999. — № 2. — С. 23–27.
12. Селькин, В.М. О \mathfrak{H}^ω -критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1999. — Вып. 14. — С.127–131.
13. Шабалина, И.П. Модулярные и алгебраические решетки n -кратно ω -насыщенных формаций конечных групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / И.П. Шабалина. — Гомель, 2003. — 92 с.