Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(51), ч. 2, 2008

УДК 512.567.5

Четырехугольники, полуабелевость и самосовмещение элементов n-арных групп

Ю. И. Кулаженко

А. И. Кострикин на Всесоюзной алгебраической конференции (Свердловск, 1973 г.) поставил вопрос о необходимости нахождения приложений теории n-арных групп в различных областях знаний. В качестве примеров решения этой проблемы в настоящее время выступают следующие направления исследований:

— (m, n)-кольца и их обобщения;

— обобщенные переходные системы;

— объекты аффинной геометрии.

Появление новых методов исследования, таких как функторный и геометрический, позволило получить ряд интересных и содержательных результатов в области мультиколец, полиадических мультиколец, универсальных алгебр (см., например, [1–5]), n-арных групп [6–10]. Отметим, что очень важную роль в описании n-арных и полиадических мультиколец играет монография [1], а в построении аффинной геометрии на n-арной группе ($n \geq 2$) — монография [6].

Настоящая работа примыкает к направлению исследований, связанных с построением аффинной геометрии на n-арной группе. По сути своей статья носит алгебраический характер, хотя результаты могут быть интересны и с точки зрения геометрии.

n-Арными аналогами инвариантов аффинной геометрии, таких как параллельный перенос и отражение от точки, выступают соответственно параллелограмм и симметричные точки. Именно эти понятия, которые были введены С. А. Русаковым в [6], лежат в основе данной статьи. В работе приводится ряд критериев полуабелевости n-арных групп, выраженных через самосовмещение элементов этих групп. Причем последовательности симметрий произвольных точек строятся относительно элементов последовательностей вершин параллелограммов.

В статье рассматривается n-арная группа $G = \langle X, (\ ), ^{[-2]} \rangle$. Элементы этой группы называем точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]} \overset{2n-4}{b} a)$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a, а последовательность k элементов из X — k-угольником G. Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$, для которого выполняется равенство

$$(ab^{[-2]} \overset{2n-4}{b} c) = d,$$

называют параллелограммом G. Будем говорить, что точка $p \in X$ самосовмещается, если существует последовательность симметрий этой точки относительно других точек из X, в результате которых точка p отображается в себя.

Другие обозначения, определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [6–10].

Изложим теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X, а точка $d \in X$ такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ — параллелограмм G. n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин четырехугольника $\langle d, c, S_c(b), S_d(a) \rangle$,* *т.е. когда справедливо равенство*

$$S_{S_d(a)}(S_{S_c(b)}(S_c(S_d(p)))) = p. \tag{1}$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (1) выполняется. Докажем, что G — полуабелева n-арная группа.

На основании определения 4 из [6], симметричных точек, равенство (1) перепишем в виде

$$S_{S_c(b)}(S_c(S_d(p))) = S_{S_d(a)}(p). \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть равенства (2). С учетом определения 4 из [6], равенства 3.28 из [7] и предложения 1 из [8] имеем

$$S_{S_c(b)}(S_c(S_d(p))) = S_{S_c(b)}(S_c(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)) =$$
$$= S_{S_c(b)}(c(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)^{[-2]}\underbrace{(dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}d)\ldots c}_{2n-4}) = S_{S_c(b)}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c) =$$
$$= (S_c(b)(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)^{[-2]}\underbrace{(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)\ldots}_{2n-4}S_c(b)) =$$
$$= (S_c(b)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_c(b)) =$$
$$= ((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)) =$$
$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c). \tag{3}$$

Рассмотрим правую часть равенства (2). С учетом определения 4 из [6], равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8] и того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ — нейтральная $2(n-1)$-последовательность, имеем

$$S_{S_d(a)}(p) = (S_d(a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_d(a)) = ((da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)) \tag{4}$$

С учетом (3) и (4) равенство (2) перепишем в виде

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = (da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d). \tag{5}$$

Поскольку четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G, то по определению 2 из [6] справедливо равенство

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = d.$$

Тогда равенство (5) перепишем в виде

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) =$$
$$= ((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c))$$

или, с учетом того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ является нейтральной $2(n-1)$-последовательностью, имеем

$$((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) =$$
$$= ((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}db^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c).$$

Отсюда
$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}a) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c).$$

На основании произвольности выбора точек $a, b, c \in X$ и с учетом предложения 4 из [9] заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (1). В теореме 1 из [9] показано, что четырехугольник $\langle d, c, S_c(b), S_d(a)\rangle$ — параллелограмм G. В теореме 2 из [10] установлено, что произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин четырехугольника тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм G, а следовательно, произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин параллелограмма $\langle d, c, S_c(b), S_d(a)\rangle$, т.е. справедливо равенство (1).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X, а точка $d \in X$ такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G. n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин четырехугольника $\langle b, S_b(a), S_c(d), c\rangle$, т.е. когда справедливо равенство*

$$S_c(S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_b(p)))) = p. \tag{6}$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (6) выполняется. Докажем, что G — полуабелева n-арная группа.

На основании определения 4 из [6] равенство (6) перепишем в виде

$$S_{S_c(d)}(S_{S_b(a)}(S_b(p))) = S_c(p) \tag{7}$$

или

$$S_{S_b(a)}(S_b(p)) = S_{S_c(d)}(S_c(p)). \tag{8}$$

Преобразуем обе части равенства (8) с учетом определения 4 из [6], равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8], а также того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ является нейтральной $2(n-1)$-последовательностью. Имеем

$$(S_b(a)(S_b(p))^{[-2]}\underbrace{S_b(p)\ldots S_b(a)}_{2n-4}) = (S_c(d)(S_c(p))^{[-2]}\underbrace{S_c(p)\ldots S_c(d)}_{2n-4})$$

или

$$((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)(bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}b)^{[-2]}\underbrace{(bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}b)\ldots(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)}_{2n-4}) =$$
$$= ((cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)^{[-2]}\underbrace{(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}c)\ldots(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)}_{2n-4}).$$

Отсюда получаем:

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c)$$

или

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}c). \tag{9}$$

Поскольку четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G, то по определению 2 из [6] справедливо равенство
$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) = d. \tag{10}$$

С учетом (10) равенство (9) перепишем в виде
$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) =$$
$$= (c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}p(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}c).$$

Тогда, с учетом равенства 3.28 из [7] и предложения 1 из [8], имеем
$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c).$$

Отсюда получаем:
$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)$$

или
$$(pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c). \tag{11}$$

Умножим обе части равенства (11) слева на выражение $cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}$. Имеем
$$(cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)$$

или
$$(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c). \tag{12}$$

В силу произвольности выбора точек $a, b, c \in X$ и на основании предложения 4 из [9] заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Покажем справедливость равенства (6).

В теореме 1 из [9] доказано, что четырехугольник $\langle b, S_b(a), S_c(d), c\rangle$ — параллелограмм G. В теореме 2 из [10] установлено, что произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин четырехугольника тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм G. Исходя из этого заключаем, что произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин параллелограмма
$$\langle b, S_b(a), S_c(d), c\rangle,$$

а значит справедливо равенство (6).

Теорема доказана.

Предложение 1. *n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство*
$$(S_c(b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}S_c(b)). \tag{13}$$

Доказательство. 1. Пусть для любых $a, b, c \in X$ равенство (13) выполняется.

Преобразуем равенство (13) с учетом определения симметричности точек. Имеем

$$((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)). \tag{14}$$

Покажем, что G — полуабелева n-арная группа, если выполняется равенство (14). Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X$. Учитывая равенство (14) и то, что $x_1x_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}$ и $x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_n$ — нейтральные $2(n-1)$-последовательности, получим

$$(x_1^n) = (x_1x_2^{n-1}x_n) = (x_1x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}(x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n))) =$$
$$= ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}(x_1^n))x_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1) = ((x_nx_1^{[-2]}\overset{2n-4}{x_1}x_1)x_2^{n-1}(x_nx_n^{[-2]}\overset{2n-4}{x_n}x_1)) = (x_nx_2^{n-1}x_1).$$

На основании равенства (15), с учетом определения полуабелевой n-арной группы замечаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Если G — полуабелева n-арная группа, то справедливость равенства (13) следует из предложения 4 из [9]. Предложение доказано.

Теорема 3. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X, а точка $d \in X$ такая, что четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G. n-Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин четырехугольника*

$$\langle a, b, S_c(b), S_d(a)\rangle,$$

т. е. когда выполняется равенство

$$S_{S_d(a)}(S_{S_c(b)}(S_b(S_a(p)))) = p. \tag{16}$$

Доказательство. 1. Предположим, что равенство (16) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

На основании определения 4 из [6] равенство (16) перепишем в виде

$$S_{S_c(b)}(S_b(S_a(p))) = S_{S_d(a)}(p)$$

или

$$S_b(S_a(p)) = S_{S_c(b)}(S_{S_d(a)}(p)). \tag{17}$$

Преобразуем равенство (17) с учетом определения 4 из [6], равенства 3.28 из [7], предложения 1 из [8] и того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ является нейтральной $2(n-1)$-последовательностью. Имеем

$$S_b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = S_{S_c(b)}(S_d(a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_d(a))$$

или

$$(b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}b) = S_{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)}((da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)).$$

Отсюда получаем:

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = ((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}dp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}da^{[-2]}\overset{2n-4}{a}d)\ldots}_{2n-4}(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c))$$

или

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,pd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,ad^{[-2]}\overset{2n-4}{d}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) \tag{18}$$

Поскольку четырехугольник $\langle a, b, c, d\rangle$ — параллелограмм G, то, по определению 2 из [6], справедливо равенство

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c) = d.$$

С учетом этого равенства (18) будет иметь вид

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) =$$

$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}a(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}p$$

$$(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}a(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)^{[-2]}\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)\ldots}_{2n-4}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)$$

или

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) =$$

$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,p$$

$$c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c).$$

Отсюда

$$(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c). \tag{19}$$

Умножим обе части равенства (19) слева на выражение $cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}$. Имеем

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) =$$

$$= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}\,ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c). \tag{20}$$

С учетом того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ является нейтральной $2(n-1)$-последовательностью, равенство (20) примет вид

$$(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,c)$$

или

$$(S_c(b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,b) = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}\,S_c(b)). \tag{21}$$

С учетом (21) и на основании предложения 1 заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

2. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Справедливость равенства (16) следует из теоремы 2 из [10], поскольку в теореме 1 из [7] установлено, что четырехугольник $\langle a, b, S_c(b), S_d(a)\rangle$ — параллелограмм G.

Теорема доказана.

Abstract. In the paper some criteria of semi-commutativity of a n-ary group are obtained.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба; М.: Наука. 1989. — 254 с.

2. Вэньбинь, Го. Теория Фраттини для классов конечных универсальных алгебр мальцевских многообразий / Го Вэньбинь, К.П. Шам // Сибирский матем. журн., 2003. — Т. 43, № 6. — С. 1283–1291.

3. Аль Дабабсех, А.Ф. О τ-замкнутых формациях n-арных групп / А.Ф. Аль Дабабсех // вестник Витебского университета, 1997. — № 3(5). — С. 58–60.

4. Кравченко, Ю.В. О некоторых типах подсистемных функторов / Ю.В. Кравченко, И.А. Кузменкова; Гомель, 2001. — 8 с. (Препринт / Гомельский госуниверситет. № 9(114)).

5. Ходалевич, А.Д. Функторы и классы Шунка универсальных алгебр / А.Д. Ходалевич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, 2004. — № 6(27). — С. 37–40.

6. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

7. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп / С.А. Русаков; Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

8. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

9. Кулаженко, Ю.И. Построение фигур аффинной геометрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 65–82.

10. Кулаженко, Ю.И. Самосовмещение элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. Т.И. Васильевой, Гомель, 2002. — С. 66–71.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 16.10.08