

УДК 512.542

Описание элементов высоты 3 решетки s_n -замкнутых ω -насыщенных формаций

И. М. БЛИЗНЕЦ

В работе рассматриваются только конечные группы. Вся терминология стандартна и заимствована из [1, 2]. Кроме того, нам будут необходимы некоторые определения и обозначения из работы А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [3] и понятие подгруппового функтора, введенное А.Н.Скибой в монографии [2].

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ;

2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$

имеет место

$$H^\varphi \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

В дальнейшем τ обозначает некоторый фиксированный подгрупповой функтор Скибы. Формация \mathfrak{F} называется τ -замкнутой [2], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} является элементом высоты n решетки всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, когда n — точная верхняя грань длин цепей

$$\emptyset = \mathfrak{F}_0 \subset (1) \in \mathfrak{F}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

в которой \mathfrak{F}_i — τ -замкнутая ω -насыщенная формация при $i = 0, \dots, n$.

В работе [4] было получено описание элементов высоты 3 решетки всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций.

Целью данной работы является описание элементов высоты 3 решетки всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций в случае, когда $\tau(G)$ — множество всех нормальных группы G для любой группы G .

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — s_n -замкнутая ω -насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{F} является элементом высоты 3 решетки всех s_n -замкнутых ω -насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = s_n^\omega \text{form } G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — неизоморфные простые группы и при p , делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R , что выполняется одно из следующих условий:

1) G — такая простая неабелева группа, что $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;

2) G — циклическая примарная группа порядка p^2 , где $p \notin \omega$;

3) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

4) $R \neq G$, $\pi(G) \cap \omega = \emptyset$, и найдется такая простая неабелева группа A , что $G/R \simeq A$ и R имеет вид:

$$A_1 \times \dots \times A_t,$$

где $t \geq 1$, $A_1 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку формация \mathfrak{F} является элементом высоты 3 решетки всех s_n -замкнутых ω -насыщенных формаций, то согласно теореме 1 [4] формация $\mathfrak{F} = s_n^\omega \text{form } G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — неизоморфные простые группы и при p , делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R , что выполняется одно из следующих условий:

- а) $R = G^{\omega_p}$ — неабелева группа и все собственные нормальные подгруппы группы G являются p -группами, причем $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;
- б) $R \neq G$ — ω' -группа, $R = G^{\omega_p}$ для некоторого $p \in \omega$ и все собственные нормальные подгруппы группы G являются p -группами;
- в) G — циклическая примарная группа порядка p^2 , где $p \notin \omega$;
- г) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;
- д) $R \not\subseteq \Phi(G)$, $R \neq G$, $\pi(G) \cap \omega = \emptyset$, и найдется такая простая группа A , что всякая факторгруппа G/R , а также всякая нетривиальная нормальная подгруппа группы G имеют вид

$$A_1 \times \dots \times A_t,$$

где $t \geq 1$, $A_1 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

Пусть теперь G — такая монолитическая группа с цоколем R , что выполняется условие а). Тогда, поскольку R — неабелева группа, то она не является p -группой. Следовательно, группа R не является собственной нормальной подгруппой группы G . Поэтому, $R = G$ — простая неабелева группа, что противоречит условию. Таким образом, имеем случай 1).

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию б). Поскольку R — ω' -группа, а все собственные нормальные подгруппы группы G являются p -группами, где $p \in \omega$, то $R = G$ — простая ω' -группа. Противоречие. Таким образом, данный случай также невозможен.

Случаи, когда группа G удовлетворяет условиям в) и г), совпадают с условиями 1) и 2) следствия соответственно.

Пусть теперь относительно группы G выполняется условие д). Предположим сначала, что A — абелева группа. Тогда, очевидно, M — абелева группа. Значит,

$$M \subseteq C_G(R) = R \neq M.$$

Противоречие.

Допустим, что G/R не является простой группой и пусть M — такая нормальная в G подгруппа, что

$$R \subset M \subset G.$$

Тогда по условию

$$M = A_1 \times \dots \times A_n,$$

где $A_1 \simeq \dots \simeq A_n \simeq A$. Так как $R \not\subseteq \Phi(G)$, то

$$C_G(R) \subseteq R.$$

Действительно, если R — неабелева группа, то $C_G(R) = 1$. Если же R — абелева группа и $C = C_G(R)$, а T — такая максимальная в G подгруппа, что $RT = G$, то

$$C = C \cap RT = R(C \cap T).$$

Кроме того,

$$C \cap T \trianglelefteq G.$$

Действительно,

$$R \subseteq N_G(C \cap T)$$

и

$$C \cap T \trianglelefteq T \text{ (т.к. } C \trianglelefteq G\text{)}.$$

Значит,

$$G = RT \subseteq N_G(C \cap T),$$

т.е. $C \cap T \trianglelefteq G$. Допустим, что $C \cap T \neq G$. Тогда

$$R \subseteq C \cap T.$$

Следовательно, $R \subseteq T$. Значит,

$$RT = T = G.$$

Противоречие. Итак, $C \cap T = 1$. Поэтому, $C = R$.

Пусть теперь A — неабелева группа. Тогда, согласно лемме 1 [5], существуют индексы i_1, \dots, i_a такие, что

$$R = A_{i_1} \times \dots \times A_{i_a}.$$

Но тогда остальные факторы произведения $M = A_1 \times \dots \times A_n$ входят в $C_G(R) = C$. Противоречие. Итак, $G/R \simeq A$, т.е. выполняется условие 3) теоремы.

Достаточность непосредственно вытекает из теоремы 1 [4].

В случае, когда $\tau(G)$ — множество всех субнормальных подгрупп группы G для любой группы G , аналогично теореме 1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{F} — s_{sn} -замкнутая ω -насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{F} является элементом высоты 3 решетки всех s_{sn} -замкнутых ω -насыщенных формаций, когда $\mathfrak{F} = s_{sn}^\omega \text{ form } G$, где либо $G = A_1 \times A_2$, A_1 и A_2 — неизоморфные простые группы и при p , делящем $|A_i|$, где $p \in \omega$, имеет место $|A_i| = p$, либо G — такая монолитическая группа с цоколем R , что выполняется одно из следующих условий:

- 1) G — такая простая неабелева группа, что $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ для некоторого $p \in \omega$;
- 2) G — циклическая примарная группа порядка p^2 , где $p \notin \omega$;
- 3) G — неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;
- 4) $R \neq G$, $\pi(G) \cap \omega = \emptyset$, и найдется такая простая неабелева группа A , что $G/R \simeq A$ и R имеет вид:

$$A_1 \times \dots \times A_t,$$

где $t \geq 1$, $A_1 \simeq \dots \simeq A_t \simeq A$.

Abstract. Only finite groups are considered in the paper. The purpose of the paper is to describe elements of the height 3 of the lattice of all τ -closed ω -saturated formations in the case when $\tau(G)$ is a set of all normal groups G for any group G .

Литература

1. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Математические труды, 1999. — Т. 2. — № 1. — С. 114–147.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба // Мн.: Беларуская навука, 1997.
3. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Математические труды, 1999. — Т. 2, № 1. — С. 114–147.
4. Близнец, И.М. Об элементах высоты 3 решетки τ -замкнутых ω -локальных формаций / И. М. Близнец // Доклады НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 2003. — Т. 47, № 2. — С. 50–53.
5. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. 2006.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 05.06.07

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ