Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

О пересечении максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп

Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп одной из классических задач является задача, связанная с исследованием свойств пересечений заданных максимальных подгрупп и изучении влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление было инициировано Г.Фраттини в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие во многих направлениях (см. монографии [2] и [3]). Одно из направлений теории пересечений связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В.Селькина [3], Л.И.Шидова [4], В.В.Шлыка [5], А.Гилотти и У.Тиберио [6] и многих других авторов. К данному направлению относится и настоящая работа.

Согласно [3] m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ её максимальных подгрупп и саму группу G; при этом предполагается, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Если Θ — m-функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ-подгруппой группы G. Обозначим через $\Phi_\Theta(G)$, и назовем Θ-подгруппой Фраттини, пересечение всех Θ-подгрупп группы G.

Пусть Θ — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда $\bar{\Theta}(G)$ — множество всех максимальных подгрупп группы G, которые не сопряжены с некоторой фиксированной максимальной подгруппой M группы G. Понятно, что $\bar{\Theta}(G)$ содержит и саму группу G. При этом $\Phi_\Theta(G) = M_G$ — ядро подгруппы M в группе G. Очевидно, что

$$\Phi_{\bar{\Theta}}(G) \cap M_G = \Phi(G)$$

для любой группы G.

Обозначим через $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)$ пересечением не p-нильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой. А через $\bar{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\bar{\Theta}_1}(G)$ пересечением ненильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой. Всегда будем полагать, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Теорема 1. *Пусть $p > 2$ и Θ_1 — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда для любой не p-разрешимой группы G справедливо $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$, где P — нормальная p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Обозначим $D = \bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)$ Пусть P — силовская p-подгруппа из D, не содержащаяся в максимальной Θ_1-подгруппе M. По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$.

Предположим, что $N_G(P) \neq G$. Пусть R — максимальная подгруппа группы G такая, что $N_G(P) \subseteq R$. Так как $G = DR$, то либо R p-нильпотентна либо не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M. Если предположить, что R — не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M, то в силу того, что $|G : M| \neq |G : K|$, получаем противоречие. Остается заключить, что R — p-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $N_G(P)$ — p-нильпотентная подгруппа.

Если D p-нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G p-разрешима. Противоречие.

Будем считать, что D не p-нильпотентна. Тогда, на основании работы [7], найдётся характеристическая подгруппа P^* из P такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — не p-группа. Так как $N_G(P) \subseteq N_G(P^*)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны случаи $N_G(P^*) = G$, либо $N_G(P^*)$ p-нильпотентна. Так как $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p-группа, то второй случай невозможен. Остаётся принять, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ — не p-группа и $P^* \triangleleft G$.

Пусть P^* — максимальная подгруппа среди характеристических подгрупп группы P, обладающая отмеченными выше свойствами. Так как $N_G(P)$ p-нильпотентна, то $P^* \subset P$. Пусть P_0/P^* — характеристическая подгруппа группы P/P^*.Тогда P_0 характеристична в P и $P^* \subset P_0$. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ — p-группа.

Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_D(P_0)P^*/P^* \subseteq C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Отсюда получаем, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ — p-группа. Следовательно, на основании работы [7] группа D/P^* является p-нильпотентной. Но тогда D является p-разрешимой группой. Отсюда и из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость и самой группы G. Противоречие. Остаётся заключить, что P — нормальная p-подгруппа группы G.

Так как $M \not\supseteq P$, то несложно заметить, что $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть $p > 2$ и Θ_1 — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой не p-разрешимой группе G существует нормальная p-подгруппа P такая, что $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \in \mathfrak{N}$.*

Следствие 1.2. *Пусть $p > 2$ и Θ_1 — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой не p-разрешимой группе G подгруппа $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.*

Следствие 1.3. *В любой не p-разрешимой группе G, $p > 2$ подгруппа, равная пересечению не p-нильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Теорема 2. *Пусть Θ_1 — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда для любой неразрешимой группы G справедливо $\bar{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$, где P — нормальная p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G) \supseteq \bar{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\bar{\Theta}_1}(G) \supseteq \Phi(G).$$

Если G не разрешима, то G не p-разрешима для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $p > 2$, то по теореме 1 $\bar{\Phi}^p_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$, а следовательно, $\bar{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\bar{\Theta}_1}(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$. Пусть G p-разрешима для любого нечётного $p \in \pi(G)$. Нетрудно видеть, что в этом случае G является разрешимой.

Следствие 2.1. *Пусть Θ_1 — m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе подгруппа $\bar{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\bar{\Theta}_1}(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.*

Следствие 2.2. *В любой неразрешимой группе G подгруппа, равная пересечению ненильпотентных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Abstract. The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are investigated.

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei, 1885. — Vol. 1. — P.281–285.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков // М.: Наука. 1978.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин // Мн.: Беларуская навука, 1997.

4. Шидов, Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л. И. Шидов // Сиб. матем. ж., 1971. — Т. 12, № 3. — С. 682–683.

5. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В. В. Шлык // Матем. заметки, 1973. — Т. 14, № 3. — С. 429–439.

6. Gilotti, A. On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino U. M. I., 2000. — V. 8, № 3-B. — P. 691–698.

7. Thompson, J.G. Normal p-complements for finite groups / J. G. Thompson // J. Algebra, 1964. — V. 1. — P. 43–46.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 22.12.07