Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Проекторы конечных π-разрешимых ди-π-разложимых групп

Т. И. Васильева, Е. А. Рябченко

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Согласно результатам Виландта [1] и Кегеля [2], группа, представимая в произведение двух своих нильпотентных подгрупп (кратко динильпотентная группа), разрешима. Класс динильпотентных групп содержит все сверхразрешимые, бипримарные, метанильпотентные группы и далеко не исчерпывается ими. В 1958 году Виландт [1] ввел следующее понятие. Подгруппа H группы $G = AB$ называется факторизуемой в $G = AB$, если $H = (A \cap H)(B \cap H)$ и $A \cap B \subseteq H$. Факторизуемые $\mathfrak{X}$-проекторы динильпотентных групп исследовали в 1990 году Хайнекен [3] для насыщенной формации $\mathfrak{X}$, в 1994 году Амберг и Хёфлинг [4] для класса Шунка $\mathfrak{X}$.

Одним из обобщений понятия нильпотентной группы является введенное в 1938 году С.А. Чунихиным [5] понятие p-разложимой группы. Группа называется p-разложимой, если силовская p-подгруппа выделяется в ней прямым множителем. Если группа p-разложима для любого p из некоторого множества простых чисел π, то она π-разложима. Ди-π-разложимые группы, т. е. группы, представимые в произведение двух своих π-разложимых подгрупп, уже необязательно являются разрешимыми. В 1983 году В.С. Монахов [6] исследовал условия разрешимости таких групп в зависимости от состава простых чисел из π.

В настоящей работе найдены условия, при которых π-разрешимая ди-π-разложимая группа обладает факторизуемым в ней $\mathfrak{X}$-проектором. Основная цель — доказать следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{X}$, $G = AB$ — π-разрешимая группа, A и B — её π-разложимые подгруппы, $\pi(A) \cup \pi(B) \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. Тогда в G имеется хотя бы один $\mathfrak{X}$-проектор, факторизуемый в $G = AB$.*

2. Основная часть

Используется терминология, принятая в [7, 8]. Напомним некоторые определения и обозначения.

Для класса групп $\mathfrak{X}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором, если HN/N — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы N из G. Примитивная группа — это группа G, в которой существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $Core_G(M)$. Класс Шунка — непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, содержащий всякую группу G, у которой все примитивные факторгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$. Через π обозначается некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел. $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$ — множество всех простых чисел p, для которых циклические группы порядка p принадлежат $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{G}_{\pi'}$ обозначается класс всех π'-групп.

Для класса Шунка $\mathfrak{X}$ такого, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{X}$, во всякой π-разрешимой группе G существует в точности один класс сопряженных $\mathfrak{X}$-проекторов [9] и понятия $\mathfrak{X}$-проектора и $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппы совпадают [10].

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые известные результаты.

Лемма 1 [8]. *Пусть U, V, W — подгруппы группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

1) $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$;

2) $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

Лемма 2 [11]. *Пусть $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G. Если F — подгруппа, факторизуемая в $G = AB$, то $F = AF \cap BF$.*

Лемма 3 [8]. *Для любого непустого гомоморфа $\mathfrak{X}$ и для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) если H — $\mathfrak{X}$-проектор группы G и $N \triangleleft G$, то HN/N является $\mathfrak{X}$-проектором группы G/N;

2) если R/N — $\mathfrak{X}$-проектор группы G/N и H — $\mathfrak{X}$-проектор группы R, то H — $\mathfrak{X}$-проектор группы G.

Лемма 4 [12]. *Пусть группа $G = AB$ обладает свойством D_π, а подгруппы A и B обладают свойством E_π. Тогда*

1) существуют холловы π-подгруппы в A и B такие, что $A_\pi B_\pi = B_\pi A_\pi$ является холловой π-подгруппой группы G;

2) если A и B π-замкнуты, то $[A_\pi, B_\pi] \subseteq O_\pi(G)$.

Лемма 5 [7]. *Пусть H — абелева нормальная подгруппа группы G, причем $(|H|, |G : H|) = 1$. Тогда $H = [H, G] \times (H \cap Z(G))$.*

Лемма 6. *Пусть $G = AB$ — ненильпотентная π-разрешимая группа, A и B — ее π-разложимые подгруппы. Если G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, N — p-группа для $p \in \pi$ и $\Phi(G) = 1$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $A \cap B = 1$;

2) либо $N \subseteq A$, либо $N \subseteq A$;

3) если $N \subseteq A$, то A — p-группа, B — p'-группа.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения 1). Так как G ненильпотентна и $\Phi(G) = 1$, то в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$. Из условия следует, что N — элементарная абелева p-группа, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$. Подгруппа Фиттинга $F(G) \subseteq C_G(N)$ и $N \subseteq F(G)$, поэтому $F(G) = N$. Из π-разрешимости G следует p-разрешимость G, а также подгрупп A и B. Поэтому G, A и B обладают свойством $D_{p'}$. По утверждению 1) леммы 4 в A и B найдутся холловы p'-подгруппы $A_{p'}$ и $B_{p'}$ соответственно такие, что $A_{p'}B_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы G. Аналогично, в A и B найдутся силовские p-подгруппы A_p и B_p соответственно такие, что A_pB_p — силовская p-подгруппа группы G. Из π-разложимости A и B следует p-разложимость A и B. Поэтому $A = A_p \times A_{p'}$ и $B = B_p \times B_{p'}$. Отсюда $[A_{p'} \cap B_{p'}, A_pB_p] = 1$. Это означает, что $A_{p'} \cap B_{p'} \subseteq C_G(A_pB_p) \subseteq C_G(N) = N$. Следовательно, $A_{p'} \cap B_{p'} = 1$.

Холлова p'-подгруппа $M_{p'}$ группы M является холловой p'-подгруппой группы G. Поэтому $A_{p'}B_{p'} = M_{p'}^x \subseteq M^x$ для некоторого $x \in G$. Ввиду этого, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $A_{p'}B_{p'} \subseteq M$.

Обозначим $F^* = F^*(M)$, где $F^*(M)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы M. По лемме 3.9 из [6], $G/C_G(N) \simeq M$ не содержит нормальных p-подгрупп, т.е. $O_p(M) = 1$.

Покажем, что F^* — p'-группа. По теореме X.13.6 из [13] $F^*/Z_\infty(F^*)$ квазинильпотентна. Обозначим $\overline{F} = F^*/Z_\infty(F^*)$. Тогда $\overline{F} = \overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \times \ldots \times \overline{F}_n$ — прямое произведение неабелевых простых групп, $\overline{F}_i$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\overline{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $\overline{F}$ p-разрешима и $\overline{F}_i$ неабелева, то $\overline{F}_i$, а следовательно, и $\overline{F}$

являются p'-группами ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если p делит $|Z_\infty(F^*)|$, то в $Z_\infty(F^*)$ существует неединичная силовская p-подгруппа P. Из $P \lhd Z_\infty(F^*) char F^* \lhd M$ следует, что $P \lhd M$. Поэтому $P \subseteq O_p(M) = 1$. Противоречие с $P \neq 1$. Таким образом, p не делит $|Z_\infty(F^*)|$. Но тогда $Z_\infty(F^*)$ — p'-группа. Откуда следует, что F^* — p'-группа.

Покажем, что $F^*N/N = F^*(G/N)$. Из квазинильпотентности F^* следует квазинильпотентность F^*N/N. Ввиду $F^*N/N \lhd MN/N = G/N$ получаем, что $F^*N/N \subseteq F^*(G/N)$. Обозначим $F^*(G/N) = K/N$. Тогда $K = K \cap NM = N(K \cap M)$. Так как $K/N \simeq K \cap M/K \cap M \cap N = K \cap M$, то $K \cap M$ квазинильпотентна, причем $K \cap M \lhd M$. Поэтому $K \cap M \subseteq F^*$. Тогда $F^*N/N \subseteq K/N = (K \cap M)N/N \subseteq F^*N/N$. Это означает, что $F^*N/N = F^*(G/N)$.

По теореме X.13.2 из [13] $C_{G/N}(F^*(G/N)) \subseteq F(G/N) \subseteq F^*(G/N)$. Так как $C_G(F^*)N/N \subseteq C_{G/N}(F^*N/N)$, то $C_G(F^*)N/N \subseteq F^*N/N$. Поэтому $C_G(F^*)N \subseteq F^*N$. Из $Z(F^*N) char F^*N \lhd MN = G$ следует, что $Z(F^*N)$ нормальна в G. Если $Z(F^*N) \neq 1$, то $N \subseteq Z(F^*N)$. Так как N абелева, то $N = N \cap Z(F^*N) = C_N(F^*)$. Отсюда p'-группа $F^* \subseteq C_G(N) = N$. Получили противоречие с $|N| = p^\alpha$. Итак, $Z(F^*N) = 1$. Тогда $C_N(F^*) = 1$.

Если p делит $|C_G(F^*)|$, то ввиду $C_G(F^*)N \subseteq F^*N$ неединичная силовская p-подгруппа из $C_G(F^*)$ содержится в N, а следовательно, в $C_G(F^*) \cap N = C_N(F^*) = 1$. Противоречие. Итак, $C_G(F^*)$ p'-группа.

Из p-разложимости A и B следует, что $[A_p \cap B_p, A_{p'}B_{p'}] = 1$. Откуда $A_p \cap B_p \subseteq C_G(A_{p'}B_{p'}) \subseteq C_G(F^*) = 1$. Итак, $A_p \cap B_p = 1$.

Если $A \cap B \neq 1$, то найдется простое число r, которое делит $|A \cap B|$. Тогда неединичная силовская r-подгруппа R группы $A \cap B$ содержится в силовских r-подгруппах A_r и B_r соответственно.

Если $r = p$, то $R \subseteq A_p \cap B_p = 1$. Противоречие с $R \neq 1$.

Если $r \neq p$, то r — p'-число. Группы A и B обладают свойством $D_{p'}$. Поэтому $R \subseteq A_r \subseteq A_{p'}$ и $R \subseteq B_r \subseteq B_{p'}$. Значит, $R \subseteq A_{p'} \cap B_{p'} = 1$. Противоречие с $R \neq 1$.

Таким образом, $A \cap B = 1$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждения 2). Подгруппы $AN = AN \cap MN = (AN \cap M)N = A_1N$ и $BN = (BN \cap M)N = B_1N$, где $A_1 = AN \cap M$, $B_1 = BN \cap M$.

Покажем, что $A_1 \cap B_1 = 1$. Предположим, что $A_1 \cap B_1 \neq 1$. Допустим, что p делит $|A_1 \cap B_1|$. Тогда в $A_1 \cap B_1$ найдется силовская p-подгруппа $T \neq 1$. Так как $A_1 \cap N = 1$ и $B_1 \cap N = 1$, то ввиду $A_1 \simeq AN/N \simeq A/A \cap N$ и $B_1 \simeq BN/N \simeq B/B \cap N$ подгруппы A_1 и B_1 p-разложимы. Ясно, что $A_{p'}$ и $B_{p'}$ — холловы p'-подгруппы в A_1 и B_1 соответственно. Тогда $A_1 = A_{1_p} \times A_{p'}$ и $B_1 = B_{1_p} \times B_{p'}$, где A_{1_p} и B_{1_p} — силовские p-подгруппы из A_1 и B_1 соответственно. Отсюда получаем, что $[A_{1_p} \cap B_{1_p}, A_{p'}B_{p'}] = 1$. Тогда $T \subseteq A_{1_p} \cap B_{1_p} \subseteq C_G(A_{p'}B_{p'}) \subseteq C_G(F^*)$ — p'-группа. Противоречие. Итак, $A_1 \cap B_1$ — p'-группа. Из p-разложимости A_1 и B_1 следует, что $A_{p'}$ и $B_{p'}$ — единственные холловы p'-подгруппы в A_1 и B_1 соответственно. Значит, $A_1 \cap B_1 \subseteq A_{p'} \cap B_{p'} = 1$. Противоречие. Итак, $A_1 \cap B_1 = 1$.

Установим, что $A_1B_1 = M$. Так как $A_1B_1 = (AN \cap M)(BN \cap M) \subseteq M$, то $|A_1B_1| \leq |M|$. Из $(A \cap N)(B \cap N) \subseteq N$ следует, что $|(A \cap N)(B \cap N)| \leq |N|$. Тогда

$$|A_1B_1| = |A_1| \cdot |B_1| = \frac{|A|}{|A \cap N|} \cdot \frac{|B|}{|B \cap N|} = \frac{|G|}{|A \cap N| \cdot |B \cap N|} \geq \frac{|G|}{|N|} = |M|.$$

Таким образом, $A_1B_1 = M$. Отсюда $N = (A \cap N)(B \cap N)$.

Обозначим $N_1 = A \cap N$ и $N_2 = B \cap N$. Тогда $N = N_1 \times N_2$. Из p-разложимости A и B следует, что $N_1 \subseteq A_p \subseteq C_G(A_{p'})$ и $N_2 \subseteq B_p \subseteq C_G(B_{p'})$. Поэтому $N = C_N(A_{p'})C_N(B_{p'})$.

Так как $C_N(A_{p'}) \cap C_N(B_{p'}) \subseteq C_N(A_{p'}B_{p'}) \subseteq C_N(F^*) = 1$, то $N = C_N(A_{p'}) \times C_N(B_{p'})$. Значит, $N_1 = C_N(A_{p'})$ и $N_2 = C_N(B_{p'})$.

Покажем, что $N_i \triangleleft G$ для $i = 1, 2$. Так как $G = AB$, A и B p'-замкнуты, то по утверждению 2) леммы 4 $[A_{p'}, B_{p'}] \subseteq O_{p'}(G)$. Поскольку N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N \subseteq O_{p'}(G)$. Поэтому $O_{p'}(G) = 1$ и $[A_{p'}, B_{p'}] = 1$. Отсюда следует, что $A_{p'}B_{p'} \subseteq N_G(C_N(A_{p'}))$ и $A_{p'}B_{p'} \subseteq N_G(C_N(B_{p'}))$. По лемме A.4.7 из [8] $[C_N(A_{p'}), B_{p'}] \subseteq C_N(A_{p'})$. Допустим, что $C_N(A_{p'}) \neq [C_N(A_{p'}), B_{p'}]$. Обозначим $C_1 = C_N(A_{p'})$. Так как $B_{p'} \subseteq C_N(C_1)$, то $C_1 \triangleleft C_1 B_{p'}$. По лемме 5 получаем, что $C_1 = [C_1, B_{p'}] \times C_{C_1}(B_{p'})$. Но $C_{C_1}(B_{p'}) \subseteq C_N(B_{p'})$ и $C_{C_1}(B_{p'}) \subseteq C_1 = C_N(A_{p'})$. Из $C_N(B_{p'}) \cap C_N(A_{p'}) = 1$ следует, что $C_{C_1}(B_{p'}) = 1$. Поэтому $C_1 = [C_1, B_{p'}]$. Из леммы 5 следует, что $N = [N, B_{p'}] \times C_N(B_{p'})$. Так как $C_1 = [C_1, B_{p'}] \subseteq [N, B_{p'}]$ и $N = C_1 \times C_N(B_{p'})$, то $|N| = |[N, B_{p'}]| \cdot |C_N(B_{p'})| = |C_1| \cdot |C_N(B_{p'})|$. Откуда имеем, что $[N, B_{p'}] = C_1 = C_N(A_{p'})$. Аналогично показывается, что $[N, A_{p'}] = C_N(B_{p'})$. Но тогда $N_1 = [N, B_{p'}]$ и $N_2 = [N, A_{p'}]$. Отсюда получаем, что $A_{p'} \subseteq N_G(N_2)$ и $B_{p'} \subseteq N_G(N_1)$. Так как $N_1 = A \cap N \triangleleft A$, то $A_p \subseteq A \subseteq N_A(N_1) \subseteq N_G(N_1)$. Для любого $b \in B_p$ имеем $N_1^b = [N, B_{p'}]^b = [N^b, B_{p'}^b] = [N, B_{p'}]$. Это означает, что $B_p \subseteq N_G(N_1)$. Поскольку $|G| = |A| \cdot |B| = |A_p| \cdot |A_{p'}| \cdot |B_p| \cdot |B_{p'}| = |A_pB_p| \cdot |A_{p'}B_{p'}|$, то $G = (A_pB_p)(A_{p'}B_{p'}) \subseteq N_G(N_1) \subseteq G$, т.е. $G = N_G(N_1)$. Аналогично показывается, что $G = N_G(N_2)$. Но тогда либо $N = N_1$, либо $N = N_2$. Отсюда получаем, что либо $N \subseteq A$, либо $N \subseteq B$. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Пусть $N \subseteq A$. Из p-разложимости A следует, что $A_{p'} \subseteq C_A(A_p) \subseteq C_A(N) \subseteq C_G(N) = N$. Поэтому $A_{p'} = 1$ и A — p-группа. Так как $B = B_p \times B_{p'}$, то $B_{p'}$ — холлова p'-подгруппа в G и M. Из свойства $D_{p'}$ следует, что p'-подгруппа $F^* = F^*(M) \subseteq B_{p'}$. Но $B_p \subseteq C_B(B_{p'}) \subseteq C_B(F^*) \subseteq C_G(F^*)$ — p'-группа. Поэтому $B_p = 1$ и B — p'-группа. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что G π-разрешима, $G = AB$, где A и B — её π-разложимые подгруппы, $\pi(A) \cup \pi(B) \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$ и любой $\mathfrak{X}$-проектор группы G не факторизуется в $G = AB$.

Если G нильпотентна, то из $|G/Core_G(M)| = p \in \pi(A) \cup \pi(B) \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$ следует, что $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Но тогда $G \in \mathfrak{X}$ и G есть свой $\mathfrak{X}$-проектор, что дает противоречие с выбором G.

Значит, G — ненильпотентная группа. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда для $G/N = AN/N \cdot BN/N$ все условия теоремы выполняются. По выбору G в группе G/N существует $\mathfrak{X}$-проектор L/N такой, что $L/N = (AN/N \cap L/N)(BN/N \cap L/N)$ и $AN/N \cap BN/N \subseteq L/N$. Отсюда $L = (AN \cap L)(BN \cap L)$ и $AN \cap BN \subseteq L$. Это означает, что L факторизуема в $G = AN \cdot BN$. Ввиду леммы 2 и $N \subseteq L$, имеем $L = ANL \cap BNL = AL \cap BL$. Так как $A \subseteq AN$ и $B \subseteq BN$, то $A \cap B \subseteq L$. Поэтому $AL \cap BL = (A \cap B)L$. По лемме 1 получаем, что $L = (L \cap A)(L \cap B)$. Итак, L факторизуема в $G = AB$.

Пусть H — некоторый $\mathfrak{X}$-проектор группы L. Ввиду утверждения 2) леммы 3 H является $\mathfrak{X}$-проектором группы G. Так как HN/N — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в G/N и $HN/N \subseteq L/N \in \mathfrak{X}$, то $HN/N = L/N$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $L \neq G$. Тогда $L = (A \cap L)(B \cap L)$ — ди-π-разложимая группа, для которой все условия теоремы выполняются. Поэтому в L найдется $\mathfrak{X}$-проектор K, факторизуемый в $L = (A \cap L)(B \cap L)$. Так как $\mathfrak{X}$-проекторы сопряжены в L, то $K = H^t$ для некоторого $t \in L$. Из $A \cap B \subseteq L$ и $(A \cap L) \cap (B \cap L) \subseteq H^t$ получаем, что $A \cap B \subseteq H^t$. Отсюда и из $H^t = ((A \cap L) \cap H^t)((B \cap L) \cap H^t) = (A \cap H^t)(B \cap H^t)$ следует, что H^t — факторизуемый $\mathfrak{X}$-проектор в $G = AB$. Получили противоречие с выбором G.

2. Пусть $L = G$. Тогда $G/N = L/N \in \mathfrak{X}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Если G не является примитивной группой, то любая ее примитивная фактор-группа принадлежит $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то $G \in \mathfrak{X}$ и G является своим $\mathfrak{X}$-проектором. Противоречие с выбором G.

Пусть G — примитивная группа. Если N — π'-группа, то получаем противоречие с $G \in \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Значит, N — абелева p-группа для некоторого простого $p \in \pi$. Тогда то теореме Бэра [2] N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G такой, что $N = C_G(N)$. Из примитивности G следует, что $\Phi(G) = 1$. Так как $G = NH$ и $G \notin \mathfrak{X}$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G, причем $Core_G(M) = 1$. Из $G = NM$ и $N \cap M = 1$ следует, что $H = M$.

Так как G p-разрешима, то H также p-разрешима и обладает свойством $D_{p'}$. Поэтому $H = H_pH_{p'}$, где H_p — силовская p-подгруппа, а $H_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы H. По лемме 6 A — силовская p-подгруппа, B — холлова p'-подгруппа группы G. Поэтому $H_p \subseteq A^g$, $H_{p'} \subseteq B^h$ для некоторых элементов $g, h \in G$. Из $G = AB$ следует, что найдутся элементы $a \in A$ и $b \in B$, для которых $gh^{-1} = ab$. Тогда $A^g = A^{bh}$ и $B^h = B^{bh}$. Для $x = (bh)^{-1}$ имеем $H_p^x \subseteq A$ и $H_{p'}^x \subseteq B$. При этом $H_p^x = A \cap H^x$ и $H_{p'}^x = B \cap H^x$. Отсюда $H^x = H_p^xH_{p'}^x = (A \cap H^x)(B \cap H^x)$. Ввиду $A \cap B = 1 \subseteq H^x$, получаем, что H^x факторизуема в $G = AB$. Так как H^x является $\mathfrak{X}$-проектором группы G, то теорема доказана.

3. Заключение

Полученные в теореме условия существования факторизуемого $\mathfrak{X}$-проектора в группе $G = AB$ дают ряд приложений для конкретных классов групп $\mathfrak{X}$. Так как всякая насыщенная формация является классом Шунка, то справедливо следующее

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{F}$, $G = AB$ — π-разрешимая группа, где A и B — ее π-разложимые подгруппы, $\pi(A) \cup \pi(B) \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Тогда в G имеется хотя бы один $\mathfrak{F}$-проектор, факторизуемый в $G = AB$.*

Если $\mathfrak{X}$ — класс всех π-нильпотентных групп или класс всех π-сверхразрешимых групп, то в π-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{X}$-проекторов совпадает с множеством всех π-картеровых подгрупп, соответственно с множеством всех π-гашюцевых подгрупп [10]. Напомним, что подгруппа S группы G называется π-картеровой подгруппой, если S π-нильпотентна, $S = N_G(S)$ и $|G|_{\pi'} = |S|_{\pi'}$; подгруппа H группы G называется π-гашюцевой подгруппой, если H π-сверхразрешима, $|G|_{\pi'} = |H|_{\pi'}$ и для любых подгрупп N и M таких, что $H \subseteq N \subseteq M \subseteq G$, индекс $|M : N|$ есть составное число.

Следствие 2. *Пусть $G = AB$ — π-разрешимая группа, где A и B — ее π-разложимые подгруппы. Тогда в G имеется хотя бы одна π-картерова подгруппа, факторизуемая в $G = AB$.*

Следствие 3. *Пусть $G = AB$ — π-разрешимая группа, где A и B — ее π-разложимые подгруппы. Тогда в G имеется по крайне мере одна π-гашюцева подгруппа, факторизуемая в $G = AB$.*

Пусть $\mathcal{N}$ — такое подмножество множества всех натуральных чисел $\mathbf{N}$, что $\mathbf{N} \setminus \mathcal{N}$ замкнуто относительно умножения и содержит 1. Согласно [14], группа R называется $\mathcal{N}$-группой, если $|R : W| \in \mathcal{N}$ для любой максимальной в R подгруппы W. Если, кроме того, R есть подгруппа группы G и $|U : V|$ не принадлежит $\mathcal{N}$ для любых подгрупп U и V таких, что $R \subseteq V \subseteq W \subseteq G$, то R называется силовской $\mathcal{N}$-подгруппой группы G. В [15] показано, что если $\mathcal{N}$ содержит все π'-числа и $\mathfrak{X}$ — класс всех $\mathcal{N}$-групп, то в π-разрешимой группе множество всех $\mathfrak{X}$-проекторов совпадает с множеством всех силовских $\mathcal{N}$-подгрупп.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{N}$ содержит все π'-числа. Если $G = AB$ — π-разрешимая группа, где A и B — ее π-разложимые подгруппы, то в G имеется по крайне мере одна силовская $\mathcal{N}$-подгруппа, факторизуемая в $G = AB$.*

Abstract. The paper considers projectors of finite π-soluble π-decomposable groups and the conditions of existence in G $\mathfrak{X}$-projector H ($\mathfrak{X}$ is the Schunck class) such that $H = (A \cap H)(B \cap H)$ and $A \cap B \subseteq H$.

Литература

1. Wielandt, H. Über Produkte von nilpotenten Gruppen III / H. Wielandt // J. Math, 1958. — Vol. 2, № 4B. — P. 90–93.

2. Kegel, O.U. Produkte nilpotenter Gruppen / O. U. Kegel // Arch. Math.,1961. — Vol. 12, № 2. — P. 90–93.

3. Heineken, H. Products of finite nilpotent groups / H. Heineken // Math. Ann., 1990. — Vol. 287. — P. 643–652.

4. Amberg, B. On finite products of nilpotent groups / B. Amberg, B. Höfling // Arch. Math., 1994. — Vol. 63. — P. 1–8.

5. Tchounikhin, S. A. Über Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen / S. A. Tchounikhin // Матем. сб., 1938. — Т. 4, № 3. — С. 521–530.

6. Монахов, В. С. Разрешимость факторизуемой группы с разложимыми факторами / В. С. Монахов // Матем. заметки, 1983. — Т. 34, № 3. — С 337–340.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков // М.: Наука, 1978.

8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T.O. Hawkes // Berlin-New York, Walter de Gruyter, 1992.

9. Covaci, R. Projectors in finite π-solvable groups / R. Covaci // Studia Univ. Babes-Bolyai. Math., 1977. — Vol. 22, № 1. — P. 3–5.

10. Островская, Т.И. О проекторах π-разрешимых групп / Т. И. Островская // Вопросы алгебры, 1985. — Вып. 1. — С. 57–62.

11. Amberg, B. Artinian and Noetherian factorized groups / B. Amberg // Rend. Semin Math. Univ. Padova, 1976. — Vol. 55. — P. 105–122.

12. Pennington, E. A. Trifactorisable group / E. A. Pennington // Bull. Austral. Math. Soc., 1973. — Vol. 8, № 3, P. 461–469.

13. Huppert, B. Finite group III, / B. Huppert, N. Blackburn // Berlin: Springer-Verlag, 1982.

14. Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Canberra: Australian. Nat. Univ., 1979. — V. 11. — P. 1–100.

15. Васильева, Т.И. О π-классах и проекторах расширений конечных π-разрешимых групп / Т. И. Васильева // Вопросы алгебры, 1990. —- Вып. 5. — С. 63–69.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 15.02.08