Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Характеризации конечных разрешимых и сверхразрешимых групп по свойствам их p-вложенных подгрупп

Н. В. Гуцко, А. Н. Скиба

1. Введение

Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется квазинормальной [1] (или, по другому, перестановочной [2, 3]) в G. Подгруппа A является s-перестановочной (или s-квазинормальной) подгруппой в G, если A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. Если H — подгруппа конечной группы G, то H_{sG} — подгруппа из H, порожденная всеми такими ее подгруппами, которые s-перестановочны в G. Будем говорить, следуя [4], что H_{sG} — *s-ядро* подгруппы H в группе G.

Перестановочные подгруппы обладают рядом интересных свойств. Например, если H — перестановочная подгруппа некоторой конечно порожденной группы G, то H субнормальна в G [2]. Данный результат обобщает следующую теорему Оре [1] : *Каждая перестановочная подгруппа конечной группы является субнормальной.* Уточняя результат Оре, Ито и Сеп доказали [5], что для каждой перестановочной подгруппы H конечной группы G фактогруппа H/H_G нильпотентна. Позднее, Майер и Шмид доказали [6], что при таком условии также верно, что $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$. Кегель [7] и Дескинс [8] показали, что подгруппа H, перестановочная со всеми силовскими подгруппами конечной группы G, наследует ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, такая подгруппа H субнормальна, а факторгруппа H/H_G нильпотентна; если же G разрешима и H также перестановочна со всеми системными нормализаторами группы G, то $H/H_G \leq Z_\infty(G/H_G)$ [9].

Тем не менее, s-перестановочные подгруппы имеют следующее свойство, которое существенно отличает их от перестановочных подгрупп: *s-перестановочные подгруппы конечной группы G образуют подрешетку решетки $L(G)$ всех подгрупп из G* [7]. Данный важный результат показывает, в частности, что для любой подгруппы H конечной группы G подгруппа H_{sG} является s-перестановочной в G. Основываясь на этом факте, мы даем новые приложения перестановочных и s-перестановочных подгрупп в теории разрешимых групп. Все рассматриваемые в дальнейшем группы конечны.

Определение 1. Пусть H — подгруппа группы G. Тогда будем говорить, что H *p-вложена в G*, если существуют такие перестановочные подгруппы T и C группы G, что $HT = C$ и $T \cap H \leq H_{sG}$.

Следующий простой пример показывает, что в общем случае множество p-вложенных подгрупп шире множества всех s-перестановочных подгрупп и множества всех c-нормальных подгрупп.

Пример 3. Пусть $P = M_m(2) =< x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{1+2^{m-2}} >$, где $m > 3$. И пусть $A =< x >$, $B =< y >$. Тогда $P = [A]B$ и $|B| = 2$. Ввиду [10, с. 191], $Z(P)$ — циклическая группа порядка 2^{m-2}. Ясно, что B — нормальная подгруппа в $Z(P)B$. Пусть Z_3 — группа простого порядка 3 и $G = Z_3 \wr P = [K]P$, где K — база регулярного сплетения G. Тогда подгруппа A является p-вложенной в G, но не s-перестановочной и не c-нормальной в G.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы, дающей характеризацию сверхразрешимости в терминах p-вложенных подгрупп.

Теорема 1. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) G сверхразрешима.

(2) Каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G:E|$ имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T, что $ET = E^G$ и $T \cap E \leq E_G$.

(3) Каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G:E|$ имеет циклическое добавление в E^G и p-вложена в G.

Следствие 1 [11]. Группа G сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа нормальна в G.

Следствие 2 [12]. Группа G сверхразрешима, если каждая ее 2-максимальная подгруппа s-перестановочна в G.

Следующая наша теорема является первым шагом в доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G — группа и p — простое число. Группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M из G либо $|G:M|$ — степень числа p, либо M является p-вложенной в G подгруппой.*

2. Предварительные результаты

Напомним некоторые известные результаты о субнормальных и s-перестановочных подгруппах, которые будут использоваться в работе неоднократно.

Лемма 1. *Пусть G — группа и $A \leq K \leq G$, $B \leq G$. Тогда*

(1) *Если A и B являются субнормальными подгруппами группы G, то $\langle A, B\rangle$ субнормальна в G* [3, A, Lemma 14.4].

(2) *Предположим, что A — нормальная подгруппа в G. Тогда K/A субнормальна в G/A тогда и только тогда, когда K субнормальна в G* [3, A, Lemma 14.1].

(3)*Если A субнормальна в G и A — π-подгруппа группы G, то $A \leq O_\pi(G)$* [13].

(4) *Если A субнормальна в G и B — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $B \leq N_G(A)$* [3, A, Lemma 14.5].

(5) *Пусть H — p-группа для некоторого простого p. Тогда H — s-перестановочная подгруппа в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(H)$* [9].

Лемма 2. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1)*Если H s-перестановочна в G, то H субнормальна в G* [7].

(2)*Если H перестановочна в G, то H субнормальна в G* [1].

(3)*Если H s-перестановочна в G, то H s-перестановочна в K* [7].

Приведем основные свойства s-ядра.

Лемма 3. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда*

(1) H_{sG} — s-перестановочная подгруппа в G и $H_G \leq H_{sG}$.

(2) $H_{sG} \leq H_{sK}$.

(3) Предположим, что H нормальна в G. Тогда $(K/H)_{s(G/H)} = K_{sG}/H$.

(4) Если H является либо силовской подгруппой в G, либо максимальной подгруппой группы G, то $H_{sG} = H_G$.

Доказательство. Утверждения (1-3) очевидны. Ввиду леммы 2(1), H_{sG} субнормальна в G, и поэтому в случае, когда H является силовской подгруппой в G, $H_{sG} = H_G$ по лемме 1(3).

Теперь предположим, что H — максимальная подгруппа в G. Если $D = H_G \neq 1$, то по индукции $(H/D)_{\pi(G/D)} = (H/D)_{(G/D)} = D/D$. Следовательно, $H_{sG} = D$. Пусть $D = 1$ и N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда по [3], либо N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $C = C_G(N) \leq N$, либо G имеет в точности две минимальные нормальные подгруппы, скажем N и R такие, что $N \simeq R$ неабелева, $R = C$ и $N \cap H = 1 = R \cap H$. Пусть L — минимальная субнормальная подгруппа в G, содержащаяся в H. Если $L \leq N$, то $L^G = L^{NH} = L^H \leq D = 1$, противоречие. Следовательно, $L \nleq N$ и аналогично $L \nleq R$. Значит, $L \cap N = 1 = L \cap R$. Но по лемме 1(4), $NL = N \times L$, тогда $L \leq C$, противоречие. Таким образом, $H_{sG} = 1 = D$. Лемма доказана.

Отметим некоторые общие свойства p-вложенных подгрупп.

Лемма 4. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда:*

(1) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H p-вложена в G/H тогда и только тогда, когда K является p-вложенной подгруппой в G.*

(2) *Если H p-вложена в G, то H p-вложена в K.*

Доказательство.

(1) *Необходимость.* Предположим, прежде всего, что K/H является p-вложенной подгруппой в G/H и пусть T/H и C/H — перестановочные подгруппы в G/H такие, что $(K/H)(T/H) = C/H$ и $(T/H) \cap (K/H) \leq (K/H)_{s(G/H)}$. По лемме 2(2), T/H и C/H субнормальны в G/H. Согласно лемме 1(2), T и C субнормальны в G. С другой стороны, имеем $KT = C$ и $T \cap K \leq K_{sG}$, ввиду леммы 3(3). Следовательно, K p-вложена в G.

Достаточность. Теперь предположим, что для некоторых перестановочных подгрупп T и C из G мы имеем $KT = C$ и $T \cap K \leq K_{sG}$. Тогда по лемме 2(2) и 1(1), подгруппы HT и CH являются субнормальными подгруппами в G, поэтому по лемме 1(2), HT/H и CH/H субнормальны в G/H. С другой стороны, $(HT/H)(K/H) = CH/H$ и $(HT/H) \cap (K/H) = (HT \cap K)/H = H(T \cap K)/H \leq HK_{sG}/H = K_{sG}/H = (K/H)_{s(G/H)}$, по лемме 3(1)(3). Таким образом, K/H p-вложена в G/H.

(2) Пусть T и C — перестановочные подгруппы в G такие, что $HT = C$ и $T \cap H \leq H_{sG}$. Тогда $K \cap C = K \cap HT = H(K \cap T)$ и $K \cap T$, $K \cap C$ перестановочны в K. По лемме 3(2) имеем $(K \cap T) \cap H \leq H_{sG} \leq H_{sK}$. Следовательно, H p-вложена в K. Лемма доказана.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* Прямо следует из леммы 3.

Достаточность. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G. Поскольку гипотеза верна для G/L, то по индукции G/L разрешима. Следовательно, можем предположить, что L — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа из G. По лемме Фраттини, для любого простого числа q, делящего $|L|$, и для некоторой силовской q-подгруппы Q из L существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $LM = G$ и $N_G(Q) \leq M$. Ясно, что $M_G = 1$ и q не делит $|G : M|$. Если $|G : M| = p^{\alpha}$, то p делит $|L|$. Значит, для силовской p-подгруппы P из L мы имеем $N_G(P) \leq M$ и p не делит $|G : M|$, противоречие. Следовательно, G имеет максимальную подгруппу M такую, что $|G : M|$ не является степенью простого числа p и $M_G = 1$. Следовательно, по гипотезе, M p-вложена в G. Таким образом, G имеет перестановочные подгруппы C и $T \leq C$ такие, что $C = MT$ и $T \cap M \leq M_G = 1$. Тогда ввиду максимальности M либо $C = G$, либо $C = M$. Если $C = M$, то M перестановочна и, по лемме 2(2), M субнормальна в G. Следовательно, M нормальна в G. Тогда $M_G = M$, противоречие. Значит, $C = G$. Следовательно, $|T|$ делит $|G : M|$. Пусть X — минимальная субнормальная подгруппа из G, содержащаяся в T. Поскольку $F(G) = 1$, то X — простая неабелева группа, по лемме 1(3), и, следовательно, $X \leq L$. Тогда L представимо в виде прямого произведения простых неабелевых групп изоморфных подгруппе X. Так как q не делит $|G : M|$ и $|X|$ делит $|G : M|$, имеем $(q, |L|) = 1$. Данное противоречие показывает, что G разрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.

(1) $\Rightarrow$ (2). Прежде предположим, что G сверхразрешима и пусть E — некоторая 2-максимальная подгруппа из G с непримарным индексом $|G : E| = pq$, где $p > q$. Докажем индукцией по $|G|$, что E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T в G, что $ET = E^G$ и $T \cap E \leq E_G$.

Предположим, что $D = E_G \neq 1$. Тогда по индукции E/D имеет циклическое добавление $\langle aD \rangle$ в $(E/D)^{(G/D)}$. Тогда имеем

$$(E/D)\langle aD \rangle = (E\langle a \rangle)/D = (E/D)^{(G/D)} = E^G/D \text{ и поэтому } E\langle a \rangle = E^G.$$

С другой стороны, существует такая нормальная в G/D подгруппа T/D, что

$$(E/D)(T/D) = (E/D)^{(G/D)} \text{ и } (T/D) \cap (E/D) \leq (E/D)_{(G/D)}.$$

Следовательно, $(E/D)(T/D) = (ET)/D = (E/D)^{(G/D)} = E^G/D$ и

$$(T/D) \cap (E/D) = (T \cap E)/D \leq (E/D)_{(G/D)} = E_G/D.$$

Таким образом, $ET = E^G$ и $E \cap T \leq E_G$.

Теперь предположим, что $D = 1$. Тогда $\pi = \pi(F(G)) \subseteq \{p, q\}$. Поскольку G сверхразрешима, то $G/F(G)$ абелева. Следовательно, $E^G \leq F(G)E$. Пусть r — наибольший простой делитель порядка $|G|$ и G_r — силовская r-подгруппа G_r. Поскольку G сверхразрешима, то G_r нормальна в G и $G_r \leq F(G)$. Если L — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в G_r, то $L \not\subseteq E$ и r не делит $|G : EL|$. Предположим, что $G_r = F(G)$. Тогда $E^G \leq G_rE = LE$. Следовательно, E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T, что $ET = E^G$ и $T \cap E \leq E^G$. Теперь предположим, что $\pi = \{p, q\}$ и пусть Q — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в силовской q-подгруппе из $F(G)$. Тогда $G = [LQ]E$ и поэтому $E^G = E(E^G \cap LQ)$. Таким образом, E имеет циклическое добавление в E^G и существует такая нормальная подгруппа T, что $ET = E^G$ и $T \cap E \leq E_G$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Теперь предположим, что каждая 2-максимальная подгруппа E из G с непримарным индексом $|G : E|$ имеет циклическое добавление в E^G и p-вложена в G. Покажем, что G сверхразрешима. Допустим, что это неверно и пусть G контрпример минимального порядка. Тогда

(1) G — *непростая группа.*

Предположим, что G — простая неабелева группа. Пусть M — максимальная подгруппа из G и π — множество всех простых делителей $|G : M|$. Тогда некоторая максимальная подгруппа E из M имеет непримарный индекс $|G : E|$. Действительно, если $|\pi| > 1$, то очевидно. Пусть $|G : M| = p^a$ для некоторого простого p и пусть E — максимальная подгруппа из M, содержащая силовскую p-подгруппу из M. Тогда индекс $|G : E|$ является непримарным и по условию E p-вложена в G. Пусть C и T — перестановочные в G подгруппы такие, что $TE = C$ и $T \cap E \leq E_{sG}$. По лемме 2(1)(2). C, E_{sG} и T — субнормальные подгруппы из G. Поскольку G — простая группа, имеем $C = T = G$ и $E = E_{sG} = 1$. Но тогда $|M|$ — простое число и, значит, G сверхразрешима. Полученное противоречие доказывает (1).

(2) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L и $L = G^{\mathfrak{U}} \not\subseteq \Phi(G)$ является $\mathfrak{U}$-корадикалом из G.*

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда по лемме 4(1), гипотеза верна для G/L, поэтому G/L сверхразрешима, ввиду выбора группы G. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то имеем (2).

(3) *G разрешима.*

Ввиду (1) и (2), G имеет нормальную максимальную подгруппу M. Пусть $|G : M| = p$. Тогда каждая максимальная подгруппа E из M, для которой $|M : E|$ не является степенью числа p, является p-вложенной в G, по условию. По лемме 4(2) подгруппа E p-вложена в M. Следовательно, M разрешима ввиду теоремы 2. Значит, G разрешима.

(4) *$G = [L]M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, где $L = C_G(L) = O_p(G)$ для некоторого простого $p \neq |L|$.*

Ввиду (3), L — p-группа для некоторого простого p. Согласно (2), $L = C_G(L) = O_p(G)$ и $|L| > p$, поскольку G не является сверхразрешимой.

(5) *L не является силовской p-подгруппой из G.*

Предположим, что L — силовская p-подгруппа из G и пусть E — нормальная максимальная подгруппа из M. Тогда E имеет непримарный индекс $|G : E|$ и, по условию, E p-вложена в G и имеет циклическое добавление X в E^G. Предположим, что $E = 1$ и пусть V — максимальная подгруппа из L. Тогда по условию, V является p-вложенной в G подгруппой. Пусть C и T — перестановочные в G подгруппы такие, что $C = VT$ и $T \cap V \leq V_{sG}$. Поскольку L — силовская p-подгруппа из G, то подгруппы V_{sG}, C и T нормальны в G, по лемме 1(5). Следовательно, $T = L$ и $V = 1$. Но тогда $|L| = p$, что противоречит (4). Таким образом, $E \neq 1$. Пусть $|M : E| = q$ и Q — силовская q-подгруппа из M. Ясно, что Q — силовская q-подгруппа из G, поэтому $A = E^G Q = QE^G$ — подгруппа из G. Поскольку E нормальна в M, то $E^G \leq LE$. Предположим, что $1 \neq L \cap E^G \neq L$. Тогда $1 \neq L \cap A \neq L$ и $LA = LE^G Q = LM = G$. Значит, $L \cap A$ нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности L. Следовательно, либо $L \cap E^G = 1$, либо $L \leq E^G$. Предположим, что $L \cap E^G = 1$. По лемме 2(2), E^G субнормальна в G, и поэтому $L \leq N_G(E^G)$. Следовательно, $LE^G = L \times E^G$ и более того $E^G \leq C_G(L) = L$. Полученное противоречие показывает, что $L \leq E^G$ и $E^G = LE = XE$. Поскольку L — силовская p-подгруппа из $LE = XE$, то L изоморфна силовской p-подгруппе из X, и поэтому L — циклическая группа, что противоречит (4).

(6) *M имеет ненормальную максимальную подгруппу E такую, что $|M : E| = q \neq p$.*

Предположим, что каждая максимальная подгруппа E из M с $|M : E| = q \neq p$ нормальна в M. Тогда M — q-нильпотентна для всех таких q. Следовательно, M p-замкнута. Но ввиду (4) имеем $O_p(M) = 1$. Следовательно, L является силовской p-подгруппой в G, что противоречит (5).

Заключительное противоречие.

Пусть E — ненормальная максимальная подгруппа из M такая, что $|M : E| = q \neq p$. Пусть $D = E^G$ и T — циклическое добавление к E в D. Предположим, что $M \leq D$. Тогда очевидно, что $D = G$. Следовательно, $G = ET = MT$. Ясно, что $K = M \cap T \neq 1$. Значит, $K^G = K^{TM} = K^M \leq M_G = 1$. Полученное противоречие показывает, что $M \nsubseteq D$. Следовательно, $E = D \cap M$ — субнормальная подгруппа из M. Но E — максимальная подгруппа в M, поэтому E нормальна в M. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Abstract. The paper presents the characterization of finite soluble and supersoluble groups according to the properties of their p-embedded subgroups. Let G be a finite group and H a sub-group of G. Let H_{sG} be the subgroup of H generated by all those subgroups of H

which are s-permutable in G. Then we say that: H *is p-embedded in G* if G has permutable subgroups C and T such that $T \cap H \leq H_{sG}$ and $HT = C$. Our main result here is the following

Theorem. *Let G be a group. Then the following statements are equivalents: (1) G is supersoluble.*

(2) Every 2-maximal subgroup E of G, with non-primary index $|G : E|$, both have a cyclic supplement in E^G and there exists such a normal subgroup T that $ET = E^G$ and $T \cap E \leq E_G$.

(3) Every 2-maximal subgroup E of G, with non-primary index $|G : E|$, both have a cyclic supplement in E^G and are p-embedded in G.

Литература

1. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J., 1939. — V. 5. — P. 431–460.

2. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S. E. Stonehewer // Math. Z., 1972. — V. 125. — P. 1–16.

3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

4. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroup of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra, 2007. — V. 315. — P. 192–209.

5. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math., 1962. — V. 23. — P. 168–170.

6. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z., 1973. — V. 131. — P. 269–272.

7. Kegel, O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z., 1962. — V. 78. — P. 205–221.

8. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E.Deskins // Math. Z., 1963. — V. 82. — P. 125–132.

9. Schmid, P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra., 1998. — V. 207. — P. 285–293.

10. Gorenstein, D. Finite Groups / D.Gorenstein; New York-Evanston-London: Harper & Row Publishers, 1968.

11. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z., 1954. — V. 60. — P. 409–434.

12. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K.Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc., 1976. — V. 54. — P. 13–21.

13. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt: Lectures given at the Ohio State University, Columbus. Ohio, 1971.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.02.08