Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №2(47), 2008

УДК 511.36

О теореме Хинчина в случае расходимости и совместных приближениях нуля значениями целочисленных полиномов в пространствах действительных и комплексных чисел

И. А. Корлюкова

Введение. Рассматриваемая задача относится к метрической теории диофантовых приближений в различных пространствах. Впервые она была рассмотрена в работах В.Г. Спринджука [1].

Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен с целочисленными коэффициентами, $\deg P_n(x) = n$ и $H = H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$. Пусть $\varphi : N \to R^+$ – монотонно убывающая функция и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty$.

В 1924 году Хинчин доказал метрическую теорему о приближении действительных чисел рациональными числами $\frac{p}{q}$ [2]. Он доказал, что неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varphi(q)}{q},$$

где $\varphi : N \to R^+$, $\varphi \in C(R)$ и функция $x\varphi(x)$ невозрастающая, имеет бесконечно много решений в целых числах $p, q > 0$ для почти всех действительных чисел α (в смысле меры Лебега) при условии, то интеграл $\int\limits_c^{\infty} \varphi(x)dx = \infty$ для некоторого $c > 0$. С другой стороны, если интеграл $\int\limits_c^{\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то данное неравенство для почти всех α имеет не больше, чем конечное число решений в целых числах $p, q > 0$.

После 1986 года обобщения этой теоремы в случае сходимости были получены для многочленов произвольной степени В. И. Берником [3] в пространстве, в пространстве C Д.В. Васильевым [4] и в пространстве Q_p Э.И. Ковалевской [5]. В 1999 году В.В. Бересневич [6] доказал аналог теоремы Хинчина для многочленов в случае расходимости.

В данной работе мы обобщаем случай расходимости в теореме Хинчина на совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов $P(x)$ в пространстве $\Omega = R^2 \times C^2$.

Пусть $\mu_1 A$, $\mu_2 B$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset R$ и $B \subset R$, μ_3, μ_4 – мера Лебега на комплексной плоскости, K_1, K_2 – некоторые круги радиусов r_1, r_2 из C, $\Omega = I_1 \times I_2 \times K_1 \times K_2$, $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4$ – мера в пространстве $R^2 \times C^2$.

Гипотеза. Пусть $M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ – множество $\bar{y} = (x_1, x_2, z_1, z_2) \in \Omega$, для которых система неравенств

$$| P(x_1) |< H^{\lambda_1} \varphi^{1/6}(H),\ | P(x_2) |< H^{\lambda_2} \varphi^{1/6}(H),$$
$$| P(z_1) |< H^{\lambda_3} \varphi^{1/6}(H),\ | P(z_2) |< H^{\lambda_4} \varphi^{1/6}(H), \qquad (1)$$
$$\deg P \geq 3,\ \ \lambda_i \leq 0,\ \ i = \overline{1,4}\,,\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 6 - n$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P(t) \in Z[t]$. Тогда для почти всех $\overline{y}$ при $\sum_{H=1}^{\infty} \varphi(H) = \infty$ верно равенство

$$\mu M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \pi \mid I_1 \mid \cdot \mid I_2 \mid \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 = \mu\, \Omega.$$

Теорема. Гипотеза справедлива, если множество решений системы (1) содержится в объединении шестимерных кубов.

Замечание. При введенных в гипотезе условиях множество решений системы (1), как нетрудно показать [1, 3], содержится в объединении шестимерных параллелепипедов. Мы не стали вводить дополнительные условия на $\lambda_j, 0 \leq j \leq 4$, поскольку в доказательстве мы строим оптимальную регулярную систему при произвольных $\lambda_j, 0 \leq j \leq 4$ и только на окончательном этапе при применении метода Бересневича [6] мы не смогли получить доказательство для произвольных параллелепипедов.

Доказательство теоремы. В работе [6] показано, что теорема будет справедлива, если удастся доказать, что четверки $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $\alpha_1 \in R$, $\alpha_2 \in R$, $\beta_1 \in C$, $\beta_2 \in C$, $\operatorname{Im}\beta_1 \neq 0$, $\operatorname{Im}\beta_2 \neq 0$ и $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = P(\beta_1) = P(\beta_2) = 0$, образуют оптимальную регулярную систему.

Оптимальную регулярную систему на $\Omega = I_1 \times I_2 \times K_1 \times K_2$ из четверки корней $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ построим следующим образом. Для любой точки $(x_1, x_2, z_1, z_2) \in \Omega$ и действительного числа $D \geq 1$ (которое далее будем считать достаточно большим) при некотором $c = c(n)$ с помощью принципа «ящиков Дирихле» можно доказать, что существует многочлен $P(t) \in Z[t]$ такой, что выполняется система неравенств

$$| P(x_1) |< c \cdot D^{-v_1},\ | P(x_2) |< c \cdot D^{-v_2},$$
$$| P(z_1) |< c \cdot D^{-v_3},\ | P(z_2) |< c \cdot D^{-v_4}, \qquad (2)$$
$$| a_i | \leq D,\ \ i = \overline{1,n},\ \ v_j > -1,\ \ j = \overline{1,4},\ \ v_1 + v_2 + 2v_3 + 2v_4 = n - 5.$$

Обозначим через $S_1 = S_1(v_1, v_2, v_3, v_4, c_1)$ множество $\overline{y} \in \Omega$, для которых выполняется (2) при дополнительных условиях

$$| P'(x_1) |< c_1 D \text{ или } | P'(x_2) |< c_1 D \text{ или } | P'(z_1) |< c_1 D \text{ или } | P'(z_2) |< c_1 D\,. \qquad (3)$$

Покажем, что при достаточно малом c_1 выполняется неравенство

$$\mu S_1 \leq \frac{1}{2} \mu\, \Omega\,. \qquad (4)$$

Тогда на множестве $S_2 = \Omega \setminus S_1$, $\mu S_2 > \frac{1}{2} \mu \Omega$ выполняется (3) и

$$| P'(x_i) | \geq c_1 D\,,\ | P'(z_i) | \geq c_1 D\,,\ i = 1{,}2\,. \qquad (5)$$

Из условий $| P(x_1) |< c \cdot D^{-v_1}$ и $| P'(x_1) | \geq c_2 D$ (см. (2) и (5)) с помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях легко доказать, что существует действительный корень α_1 полинома $P(x)$ такой, что $| x_1 - \alpha_1 |< c_2' \cdot D^{-v_1 - 1}$. Аналогично из условий (2) и (5) следует, что существуют корни $\alpha_2 \in R$, $\beta_1 \in C$, $\beta_2 \in C$ многочлена $P(x)$ такие, что

$$| x_2 - \alpha_2 |< c_2' \cdot D^{-v_2 - 1},\ | z_1 - \beta_1 |< c_2' \cdot D^{-v_3 - 1},\ | z_2 - \beta_2 |< c_2' \cdot D^{-v_4 - 1}.$$

Выберем максимальную систему таких четверок корней, на которой и построим оптимальную регулярную систему, как в [6, 7].

Доказательство неравенства (4) в данной работе проведем для одного из возможных случаев в (3), когда для всех $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$ при некотором c_3 выполняется система неравенств

$$
\begin{gathered}
|P'(x_1)| > c_3 \cdot D,\ |P'(x_2)| > c_3 \cdot D, \\
|P'(z_1)| < c_1 \cdot D,\ |P'(z_2)| < c_1 \cdot D.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Покажем, что при достаточно малом c_1 в (6) выполняется (4). Зафиксируем $\delta > 0$ и исключим из рассмотрения точки $(z_1, z_2) \in K_1 \times K_2$, для которых $|\operatorname{Im} z_1| < \delta$, $|\operatorname{Im} z_2| < \delta$, что в силу произвольности δ не влияет на результат. Таким образом считаем, что в дальнейшем

$$
|\operatorname{Im} z_1| \ge \delta,\ |\operatorname{Im} z_2| \ge \delta. \tag{7}
$$

Пусть $0 < \eta < 1$ и $S_{11} = S_{11}(v_1, v_2, v_3, v_4, c_1, \eta)$ – подмножество S_1, для которого верна система неравенств

$$
\begin{gathered}
|P(x_1)| < c \cdot D^{-v_1},\ |P(x_2)| < c \cdot D^{-v_2}, \\
|P(z_1)| < c \cdot D^{-v_3},\ |P(z_2)| < c \cdot D^{-v_4}, \\
|P'(x_1)| > c_3 \cdot D,\ |P'(x_2)| > c_3 \cdot D, \\
d^{\eta} < |P'(z_1)| < c_1 \cdot D,\ d^{\eta} < |P'(z_2)| < c_1 \cdot D.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Из системы (8) можно получить оценки для $|x_1 - \alpha_1|$, $|x_2 - \alpha_2|$, $|z_1 - \beta_1|$, $|z_2 - \beta_2|$, где α_1, α_2 – ближайшие корни полинома $P(x)$ к действительным числам x_1, x_2 соответственно, β_1, β_2 – ближайшие корни полинома $P(z)$ к комплексным числам z_1 и z_2 соответственно. Если зафиксировать корни $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, то согласно [3] все $\bar{y}$, удовлетворяющие (8), лежат внутри четырехмерного параллелепипеда $\sigma_1 = \sigma_{11} \times \sigma_{12} \times \sigma_{13} \times \sigma_{14}$, где

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11} : |x_1 - \alpha_1| < c_4 \cdot D^{-v_1 - 1},\ \sigma_{12} : |x_2 - \alpha_2| < c_4 \cdot D^{-v_2 - 1}, \\
\sigma_{13} : |z_1 - \beta_1| < c_4 \cdot D^{-v_3 - 1} \cdot |P'(\beta_1)|^{-1}, \\
\sigma_{14} : |z_2 - \beta_2| < c_4 \cdot D^{-v_4 - 1} \cdot |P'(\beta_2)|^{-1}.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Для простоты вычислений положим $I_1 = [-a_1; a_1]$, $I_2 = [-a_2; a_2]$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, K_1, K_2 – круги с центром в начале координат радиусов r_1 и r_2. Введем новый четырехмерный параллелепипед $\sigma_2 = \sigma_{21} \times \sigma_{22} \times \sigma_{23} \times \sigma_{24}$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{21} : [-2a_1; 2a_1],\ \sigma_{22} : [-2a_2; 2a_2], \\
\sigma_{23} : |z_1 - \beta_1| < c_5 \cdot D^{-v_3 + \frac{n-6-v_1}{2}} \cdot |P'(\beta_1)|^{-1}, \\
\sigma_{24} : |z_2 - \beta_2| < c_5 \cdot D^{-v_4 + \frac{n-6-v_2}{2}} \cdot |P'(\beta_2)|^{-1}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Покажем, что при достаточно большой константе c_5 и достаточно малой константе c_1 условие (4) выполняется.

Из (9) и (10) получаем

$$
\frac{\mu\sigma_1}{\mu\sigma_2} < c_5^{-2} c_6 D^{-n+5}. \tag{11}
$$

Разложим многочлен $P(z)$ в кругах σ_{23} и σ_{24}:

$$
P(z_1) = P(\beta_1) + P'(\beta_1)(z_1 - \beta_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_1)(z_1 - \beta_1)^2,\ \xi_1 \in \sigma_{23},
$$

$$
P(z_2) = P(\beta_2) + P'(\beta_2)(z_2 - \beta_2) + \frac{1}{2} P''(\xi_2)(z_2 - \beta_2)^2,\ \xi_2 \in \sigma_{24}.
$$

При $\eta > \frac{1}{2}$ из (11) при достаточно большом $D > D_0(c, c_1, ..., c_6)$ следует, что

$$|P(z_1)| < 2c_5 \cdot D^{-0,5}, \ |P(z_2)| < 2c_5 \cdot D^{-0,5}.$$

Учитывая разложение $P'(z_1)$ и $P'(z_2)$ на σ_{23} и σ_{24}, при $\eta > \frac{1}{2}$ для всех $z_1 \in \sigma_{23}$, $z_2 \in \sigma_{24}$ получаем

$$|P'(z_1)| < 2c_1 \cdot D, \ |P'(z_2)| < 2c_1 \cdot D. \qquad (12)$$

Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n, ..., a_3)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(t)$, и все многочлены с одним и тем же вектором $\bar{b}$ объединим в класс $\wp(\bar{b})$.

Определение. Четырехмерный параллелепипед $\sigma_2(P_1)$ называется существенным [7, с. 51], если не существует другой четырехмерный параллелепипед $\sigma_2(P_2)$, $P_2 \in \wp(\bar{b})$, такой, что

$$\mu(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) \geq 0,5\, \mu(\sigma_2(P_1)), \qquad (13)$$

и несущественным, если существует четырехмерный параллелепипед $\sigma_2(P_2)$, $P_2 \in \wp(\bar{b})$, такой, что

$$\mu(\sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)) \geq 0,5\, \mu(\sigma_2(P_1)).$$

Рассмотрим два случая.

I. Существенные четырехмерные параллелепипеды. Из (13) имеем:

$$\sum_{P \in \wp(\bar{b})} \mu \sigma_2(P) < c_6 \mu\Omega,$$

значит, учитывая (11), получаем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \wp(\bar{b})} \mu\sigma_1(P) < c_5^{-2} c_7 D^{-n+3} D^{n+3} \mu\Omega = c_5^{-2} c_7 \mu\Omega. \qquad (14)$$

II. Несущественные четырехмерные параллелепипеды. Пусть $\sigma_3(P_1, P_2) = \sigma_2(P_1) \cap \sigma_2(P_2)$. На $\sigma_3(P_1, P_2)$ для многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$ справедлива система неравенств

$$|P_j(x_1)| < c_8 \cdot D, \ |P_j(x_2)| < c_8 \cdot D,$$

$$|P_j(z_1)| < 2c_5 \cdot D^{-0,5}, |P_j(z_2)| < 2c_5 \cdot D^{-0,5}, \ j = \overline{1,2}.$$

Следовательно, для многочлена $F(t) = P_2(t) - P_1(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ выполняется система неравенств

$$\begin{gathered} |P(x_1)| < c_9 \cdot D, \ |P(x_2)| < c_9 \cdot D, \\ |F(z_1)| < 4c_5 D^{-0,5}, \ |F(z_2)| < 4c_5 D^{-0,5}, \\ \deg P \leq 2, \ H(F) \leq 2D, \ j = \overline{1,2}. \end{gathered} \qquad (15)$$

Так как диаметр множества $\sigma_3(P_1, P_2)$ больше $0,5c_5 D^{-0,5} |P_1'(\beta)|^{-1}$, $F'(z) = 2a_2 z + a_1$, то из неравенства (15) $|F(z_i)| < 4c_5 D^{-0,5}$ и для корня β_i, $i = 1,2$ многочлена $F(z)$ имеем:

$$|z_i - \beta_i| < c_5 c_{10} D^{-0,5} |a_2|^{-1}, \ i = 1,2. \qquad (16)$$

Так как последняя оценка справедлива для всех $z_1 \in \sigma_{23}$, $z_2 \in \sigma_{24}$, то должно выполняться неравенство

$$c_{10} c_5 D^{-0,5} |a_2|^{-1} > 0,5 c_5 D^{-0,5} |P_1'(\beta)|^{-1} \Leftrightarrow |a_2| < 2c_{10} |P_1'(\beta)|.$$

Учитывая (6), имеем

$$|a_2| < 2c_{10} c_1 D. \qquad (17)$$

Обозначим $r = \min\{r_1, r_2\}$. Теперь из (7), (12) и (15) следует, что

$$|a_1| < c_{11} \cdot r \cdot |a_2|, \ |a_0| < c_{12} |a_2| r. \quad (18)$$

Мера круга (16) не превосходит $c_5^2 c_{13} D^{-1} |a_2|^{-1}$. Для того, чтобы найти меру всех пересечений $\sigma_2(P_1)$, просуммируем эту оценку по a_0 и a_1. Суммирование по a_1 с учетом (18) дает $c_5^2 c_{14} D^{-1} |a_2|^{-1} r$, а просуммировав по a_0, имеем $c_5^2 c_{15} D^{-1} r^2$. С учетом (17) приходим к окончательной оценке

$$c_1 c_5^2 c_{16} r^2 < c_1 c_5^2 c_{17} \cdot \mu\Omega. \quad (19)$$

Выберем c_5 настолько большим, чтобы в (14) выполнялось неравенство $c_5^{-2} c_7 < \frac{1}{8}$.

Затем выберем c_1 настолько маленьким, чтобы в (19) было $c_1 c_5^2 c_{17} < \frac{1}{8}$. Тогда μS_1 при $\eta \geq \frac{1}{2}$ будет меньше $\frac{1}{4}\mu\Omega$. При $\eta < \frac{1}{2}$ из работ [2] и [4] можно получить, что μS_1 стремится к 0 при $D \to \infty$. Значит, для достаточно больших D эту меру можно также сделать меньше $\frac{1}{4}\mu\Omega$. Следовательно, $\mu S_1 < \frac{1}{2}\mu\Omega$.

Abstract. The paper considers Khinchin theorem in case of divergence and mutual approximation of zero with the values of integer polynomials in the fields of real and complex numbers.

Литература

1. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Воронеж: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. – 181 с.
2. Khintchine, A.I. Einige Satze uber Kettenbruche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A.I. Khintchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – P. 115-125.
3. Берник, В.И. О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17-28.
4. Bernik, V. A Khinchin-type theorem for integral-valued polynomials of a complex variable / V. Bernik, D. Vasilyev // Proc. IM NAS of Belarus. – 1999. – №3. – P. 10-20.
5. Ковалевская, Э.И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в Q_p / Э.И. Ковалевская. – Минск, 1998. – 14 с. – (Препринт / НАН Беларуси, Ин-т математики; №2).
6. Beresnevich, V.V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 3. – P. 97-112.
7. Бударина, Н.В. Теорема Хинчина и совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов в $R \times C$ / Н.В. Бударина, Х. Диккинсон, В.И. Берник // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. физ.-мат. навук. – 2007. – № 2. – С. 48-52.

Гродненский государственный
университет имени Я. Купалы

Поступило 14.01.08