Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.567.5

Симметрия, шестиугольники и полуабелевость n-арных групп

Ю. И. Кулаженко

“Важны не вещи, а принципы симметрии”, — писал С. Вейнберг. Действительно, красота симметрии неоднократно вдохновляла не только художников, поэтов, но и ученых. Однако известный российский физик Д.Г. Павлов в своей работе “Метафизика симметрий” (МГТУ им Н.Э. Баумана, Москва, 2004 г.) отметил, что “... истинное понимание роли и места симметрий в организации окружающего нас Мира, как среди математиков, так и среди физиков, всё ещё достаточно далеко от своего полного осмысления”. В этой же работе он призывает более активно использовать n-арные операции при исследовании различных физических процессов и явлений.

Представляемая работа в какой-то степени соответствует призыву Д.Г. Павлова, поскольку в основу исследований положены не только понятия и методы наработанные несколькими поколениями алгебраистов (см., например [1–5]), но и понятие симметричности точек [6], а также других n-арных аналогов инвариантов аффинной геометрии.

Характер исследований можно описать формулой А.Ю. Ольшанского [7] “алгебра — геометрия — алгебра”, хотя, на наш взгляд, полученные результаты достаточно интересны не только с точки зрения алгебры, но и геометрии.

В частности, теоремы 1 и 3, являющиеся критериями полуабелевости n-арной группы G, одновременно являются и критериями самосовмещения произвольной точки относительно последовательности вершин, специально построенных шестиугольников G. В теореме 2 построен n-арный аналог такого шестиугольника, что произвольная точка самосовмещается относительно последовательности его вершин.

В работе рассматривается n-арная группа $G = \langle X, (\ ), {}^{[-2]}\rangle$. Элементы этой группы, в дальнейшем, будем называть точками. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}\,a)$$

называют точкой симметричной точке b относительно точки a. Последовательность k элементов из X — k-угольником G. Будем говорить, что точка $p \in X$ самосовмещается, если существует последовательность симметрий этой точки относительно других точек из X, в результате которых точка p отображается в себя.

Другие обозначения, определения и результаты, используемые в работе, можно найти в [5, 6, 8–10].

Изложим теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть a, b, c, d — произвольные точки из X. n-Арная группа G будет полуабелевой n-арной группой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника*

$$\langle a, b, c, d, (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}\,b), a\rangle,$$

т.е. когда справедливо равенство

$$S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(S_c(S_b(S_a(p)))))) = p. \tag{1}$$

Доказательство. 1. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (1). Поскольку

$$S_a(p) = (ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a), \tag{2}$$

то, с учетом равенства 3.28 из [5] и предложения 1 из [8], имеем

$$\begin{gathered} S_b(S_a(p)) = S_b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = (b(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}b) = \\ = (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b). \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда

$$\begin{gathered} S_c(S_b(S_a(p))) = S_c(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b) = \\ = (c(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)^{[-2]}\underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)\ldots}_{2n-4}c) = \\ = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c), \end{gathered} \tag{4}$$

а следовательно

$$\begin{gathered} S_d(S_c(S_b(S_a(p)))) = S_d(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c) = \\ = (d(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}d) = \\ = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d). \end{gathered} \tag{5}$$

Тогда

$$\begin{gathered} S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(S_c(S_b(S_a(p))))) = S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d) = \\ = ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)^{[-2]} \\ \underbrace{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)\ldots}_{2n-4}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\ = ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)d^{[-2]}\overset{2n-4}{d}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\ = ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)d^{[-2]}\overset{2n-4}{d}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a(b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(cd^{[-2]}\overset{2n-4}{d}d)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\ = ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(dd^{[-2]}d\overset{2n-4}{d}c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b})ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = (ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a). \end{gathered}$$

С учетом предыдущего, имеем

$$\begin{gathered} S_a(S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(S_c(S_b(S_a(p))))) = S_a(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = \\ = (a(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}a) = (aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}a) = p. \end{gathered}$$

Таким образом, мы установили справедливость равенства (1).

2. Пусть выполняется равенство (1). Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

Из равенства (1) следует, что

$$S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_d(S_c(S(b(S_a(p)))))) = S_a(p). \tag{6}$$

Откуда

$$S_d(S_c(S_b(S_a(p)))) = S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_a(p)). \tag{7}$$

С учетом равенства (5), левую часть равенства (7) перепишем в виде

$$S_d(S_c(S_b(S_a(p)))) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d). \tag{8}$$

Рассмотрим правую часть равенства (7)

$$\begin{gathered} S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(S_a(p)) = S_{(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = \\ = ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\ = ((dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)). \end{gathered} \tag{9}$$

С учетом (8) и (9) равенство (7) перепишем в виде

$$(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d)) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}(dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)).$$

Откуда, с учетом того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ является нейтральной $2(n-1)$-последовательностью, имеем

$$(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}d) = (dc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b).$$

С учетом произвольности точек $b, c, d \in X$ и предложения 4 из [9], заключаем, что G — полуабелева n-арная группа.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если G — полуабелева n-арная группа, a, b, c — произвольные точки из X, то произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника*

$$\langle S_b(a), S_c(a), S_c(b), S_a(b), S_a(c), S_b(c)\rangle,$$

т.е. справедливо равенство

$$S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(S_{S_a(b)}(S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p)))))) = p. \tag{10}$$

Доказательство. Установим справедливость равенства (10), имеем

$$S_{S_b(a)}(p) = (S_b(a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_b(a)) = ((ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a}b)).$$

Откуда, с учетом равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [8] и полуабелевости n-арной группы G,

$$\begin{gathered}
S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p)) = S_{S_c(a)}(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} b) = \\
= (S_c(a)(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} bp^{[-2]} pba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} b)^{[-2]} \underbrace{(ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} b)\ldots}_{2n-4} S_c(a)) = \\
= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c)) = \\
= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} c)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c) = \\
= ((ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a} a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} (aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a} c)) = \\
= (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} c).
\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p))) = S_{S_c(b)}((cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} c)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} c)) = \\
= S_{S_c(b)}(S_c(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} S_c(b)) = \\
= (S_c(b)(S_c(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} S_c(b))^{[-2]} \underbrace{(S_c(b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} S_c(b))\ldots}_{2n-4} S_c(b)) = \\
= (S_c(b)(S_c(b)^{[-2]} \underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4} bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} b(S_c(b))^{[-2]} \underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4} S_c(b)) = \\
= ((S_c(b)(S_c(b))^{[-2]} \underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4} b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p} (b(S_c(b))^{[-2]} \underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4} S_c(b))) = (bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} b),
\end{gathered}$$

а значит

$$\begin{gathered}
S_{S_a(b)}(S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p)))) = S_{S_a(b)}(bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} b) = \\
= (S_a(b)(bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} b)^{[-2]} \underbrace{(bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} b)\ldots}_{2n-4} S_a(b)) = \\
= ((ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} (ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a))
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
S_{S_a(c)}(S_{S_a(b)}(S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p))))) = \\
= S_{S_a(c)}(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a) = \\
= (S_a(c)(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a)^{[-2]} \\
\underbrace{(ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} pb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} ab^{[-2]}\overset{2n-4}{b} a)\ldots}_{2n-4} S_a(c)) = \\
= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} a)) = \\
= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c} b)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a} bp^{[-2]}\overset{2n-4}{p} ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c} a)) = \\
= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c} (aa^{[-2]}\overset{2n-4}{a} b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p} (ba^{[-2]}\overset{2n-4}{a} a)c^{[-2]}\overset{2n-4}{c} b) = \\
= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c} b)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p} (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c})) = (S_b(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p} S_b(c)).
\end{gathered}$$

С учетом предыдущего, имеем

$$\begin{aligned}
&S_{S_b(c)}(S_{S_a(c)}(S_{S_a(b)}(S_{S_c(b)}(S_{S_c(a)}(S_{S_b(a)}(p)))))) = S_{S_b(c)}(S_b(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_b(c)) = \\
&= (S_b(c)(S_b(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_b(c))^{[-2]}\underbrace{(S_b(c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_b(c))\ldots}_{2n-4}S_b(c)) = \\
&= (S_b(c)(S_b(c))^{[-2]}\underbrace{S_b(c)\ldots}_{2n-4}p(S_b(c))^{[-2]}\underbrace{S_b(c)\ldots}_{2n-4}S_b(c)) = p.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть a, b, c — произвольные точки из X n-арной группы G. G будет полуабелевой n-арной группой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in X$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин шестиугольника*

$$\langle a, c, b, S_b(S_c(a)), (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a))), S_a(S_c(b))\rangle,$$

т.е. когда справедливо равенство

$$S_{S_a(S_c(b))}(S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p)))))) = p. \tag{11}$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (11) выполняется. Покажем, что G — полуабелева n-арная группа.

На основании следствия 4.1 п. из [6] равенство (11) перепишем в виде

$$S_{S_a(S_c(b))}(p) = S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))))). \tag{12}$$

Рассмотрим левую часть равенства (12) с учетом определения симметричности точек, равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [8] и того, что для любого $x \in X$ последовательность $x^{[-2]}\overset{2n-3}{x}$ — нейтральная $2(n-1)$-последовательность

$$\begin{aligned}
&S_{S_a(S_c(b))}(p) = S_{S_a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)}(p) = (S_a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}S_a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)) = \\
&= ((a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}a) = \\
&= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)p^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)).
\end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим правую часть равенства (12) с учетом определения симметричности точек, равенства 3.28 из [5], предложения 1 из [8].

Поскольку

$$\begin{aligned}
&S_c(S_a(p)) = S_c(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a) = (c(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)^{[-2]}\underbrace{(ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}a)\ldots}_{2n-4}c) = \\
&= (ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S_b(S_c(S_a(p))) = S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c) = \\
&= (b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots}_{2n-4}b) = \\
&= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p)))) = S_{S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = \\
&= S_{(b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)^{[-2]}\underbrace{(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c)\ldots b}_{2n-4})}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = \\
&= S_{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = \\
&= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]} \\
&\underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\
&= ((bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\
&= (bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b),
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
&S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p))))) = \\
&= S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}c))}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = \\
&= S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b))}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) = \\
&= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)^{[-2]} \cdot \\
&\cdot \underbrace{(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}pc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)\ldots}_{2n-4}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\
&= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)b^{[-2]}\overset{2n-4}{b}cp^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b} \cdot \\
&\cdot (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) = \\
&= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

С учетом (13) и (14) имеем

$$
\begin{aligned}
&(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a) = \\
&= (ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)).
\end{aligned}
$$

Откуда

$$S_a(S_c(b)) = (cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}S_a(S_c(b))c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)$$

или

$$(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_a(S_c(b))) = (S_a(S_c(b))c^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b).$$

На основании предложения 4 из [9] заключаем, что G-полуабелева.

2. Пусть G — полуабелева n-арная группа. Установим справедливость равенства (11).

В первой части доказательства нами установлено равенство (14). Тогда, с учетом симметричности точек и полуабелевости G, имеем

$$S_{S_a(S_c(b))}(S_{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}S_b(S_c(a)))}(S_{S_b(S_c(a))}(S_b(S_c(S_a(p)))))) =$$

$$= S_{S_a(S_c(b))}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$

$$= S_{S_a(S_c(b))}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b) =$$

$$= S_{(a(S_c(b))^{[-2]}\underbrace{S_c(b)\ldots}_{2n-4}a)}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}b)) =$$

$$= S_{(a(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)^{[-2]}\underbrace{(cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}c)\ldots}_{2n-4}a)}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}(bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) =$$

$$= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)^{[-2]}$$
$$\underbrace{(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}ap^{[-2]}\overset{2n-4}{p}ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)\ldots}_{2n-4}(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) =$$

$$= ((ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)a^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}pa^{[-2]}\overset{2n-4}{a}cb^{[-2]}\overset{2n-4}{b}ca^{[-2]}\overset{2n-4}{a}$$
$$(ac^{[-2]}\overset{2n-4}{c}bc^{[-2]}\overset{2n-4}{c}a)) = p.$$

Теорема доказана.

Abstract. The paper presents n-ary analogues of hexagons of n-ary group G so that an arbitrary element from G reflecting symmetrically with regard to all the elements of the succession of the apexes of each of the hexagons coincides with itself. Theorems 1 and 3 are the criteria of semi-commutativity of n-ary group G.

Литература

1. Dornte, W. Untersuchungn uber einen verallgemeinerten Gruppenbergriff // Math. Z. — 1928. — Bd. 29. — S. 1–19.

2. Post, E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48, № 2. — P. 208–350.

3. Чунихин, С.А. К теории неассоциативных n-групп с постулатом K // Докл. АН СССР. — 1945. — Т. 48, № 1. — С. 7–10.

4. Шеметков, Л.А., Скиба, А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. — 254 с.

5. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1992. — 264 с.

6. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1998. — 182 с.

7. Ольшанский, А.Ю Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. — 448 с.

8. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 47–64.

9. Кулаженко, Ю.И. Построение фигур аффинной геометрии на n-арной группе / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. С.А. Русакова, Гомель, 1995. — С. 65–82.

10. Кулаженко, Ю.И. Самосовмещение элементов n-арных групп / Ю.И. Кулаженко // Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики: Сб. научн. тр. / Под ред. Т.И. Васильевой, Гомель, 2002. — С. 66–71.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 28.01.08