Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Критерий дисперсивности по Оре конечной группы

В. О. Лукьяненко, В. Н. Рыжик

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда подгруппа A группы G называется *перестановочной с подгруппой* B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется перестановочной [1] или квазинормальной [6] подгруппой в G. Пусть $\varnothing \neq X \subseteq G$, тогда мы будем говорить, следуя [8], что подгруппа A *X–перестановочна с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X$. Подгруппа A группы G называется *X–перестановочной в G*, если A X–перестановочна со всеми подгруппами из G. Значение понятия X–перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X–перестановочных подгрупп. Подгруппа A группы G называется *X–полуперестановочной в G* [3], если A X–перестановочна со всеми подгруппами некоторого своего добавления в G. В данной работе мы анализируем следующее более общее понятие, введенное в работе [2]

Определение. Пусть A — подгруппа группы G и X — непустое подмножество из G. Тогда мы говорим, что A является *X_m–полуперестановочной подгруппой в G* [2], если A X–перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы некоторого своего минимального добавления в G.

В работе [2] на примере было показано, что класс X_m–полуперестановочных подгрупп в общем случае шире, чем класс X–полуперестановочных подгрупп.

Множество всех минимальных добавлений T к подгруппе A в группе G таких, что подгруппа A X–перестановочна с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы из T, мы обозначим через $X_m(A)$. Таким образом, подгруппа A является X_m–полуперестановочной в G в том и только в том случае, когда $X_m(A) \neq \varnothing$.

Подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой [9, стр. 24] или иначе второй максимальной подгруппой в G [4], если в G найдется такая максимальная подгруппа M, в которой H является максимальной подгруппой. Пример группы A_4 показывает, что в общем случае группа G, в которой все 2-максимальные подгруппы силовских подгрупп из G являются нормальными в G, не обязательно сверхразрешима. Тем не менее, мы имеем следующий результат

Теорема. *Если группа G A_4-свободна, каждая 2-максимальная подгруппа P любой силовской подгруппы из G является $F(G)_m$–полуперестановочной в G и множество $F(G)_m(P)$ содержит разрешимую группу, тогда группа G дисперсивна по Оре.*

Для доказательства данной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные результаты

Лемма 1 [8]. *Пусть A, B — подгруппы группы G, $\varnothing \neq X \subseteq G$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*

(1) *Если A X–перестановочна с B, то B X–перестановочна с A.*

(2) *Если A X–перестановочна с B, то A^x X^x–перестановочна с B^x для всех $x \in G$.*

(3) *Если A X–перестановочна с B, то AK/K XK/K–перестановочна с BK/K в G/K.*

(4) *Пусть $K \leq A$. Тогда A/K XK/K–перестановочна с BK/K в том и только том случае, когда A X–перестановочна с B.*

(5) *Если A X–перестановочна с B и $X \leq M \leq G$, то A M–перестановочна с B.*

(6) *Если A X–перестановочна с B и $X \leq N_G(A)$, то A перестановочна с B.*

(7) *Если F — перестановочная подгруппа группы G и A X–перестановочна с B, то AF X–перестановочна с B.*

Лемма 2. *Пусть A, T, X — подгруппы группы G и H — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если либо $H \leq A$, либо $H \leq T$, и T является минимальным добавлением к подгруппе A в G, тогда TH/H является минимальным добавлением к факторгруппе AH/H в G/H.*

(2) *Пусть подгруппа A является X–перестановочной с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы из T. Если H — абелева подгруппа в G, либо $(|H|, |T|) = 1$, либо подгруппа T разрешима, тогда факторгруппа AH/H является XH/H–перестановочной с каждой максимальной подгруппой любой холловской подгруппы из TH/H.*

Доказательство. (1) Предположим, что $H \leq A$ и пусть E/H — такое добавление к факторгруппе A/H в G/H, что $E/H \leq TH/H$. Тогда $E = E \cap TH = H(E \cap T)$ и поэтому $G = AE = A(E \cap T)$. Следовательно, $T \leq E$ и $E/H = TH/H$ — минимальное добавление к факторгруппе A/H в G/H. С другой стороны, если $H \leq T$ и E/H — такая подгруппа в T/H, что $G/H = (AH/H)(E/H)$, тогда $G = AE$ и, следовательно, $E/H = T/H$ — минимальное добавление к факторгруппе AH/H в G/H.

(2) Пусть E/H — холловская π-подгруппа в TH/H и M/H — произвольная максимальная подгруппа в E/H. Покажем, что факторгруппа AH/H XH/H–перестановочна с M/H. Сначала заметим, что $E = E \cap TH = H(E \cap T)$, $M = M \cap TH = H(M \cap T)$, поэтому индекс $|TH : E| = |T : E \cap T|$ является π'-числом. Таким образом, если H — π-группа, тогда E также является π-группой и, следовательно, $E \cap T$ — холловская π-группа в T. С другой стороны, если $(|H|, |T|) = 1$, тогда $H \cap E \cap T = 1$ и, следовательно, в этом случае $E \cap T$ также является холловской π-группой в T. Теперь покажем, что $M \cap T$ — максимальная подгруппа в $E \cap T$. Очевидно, $M \cap T \neq E \cap T$. Предположим, что для некоторой подгруппы D группы G имеет место $M \cap T < D < E \cap T$. Тогда $M = H(M \cap T) \leq HD \leq H(E \cap T) = E$ и, следовательно, либо $M = HD$, либо $HD = E$. Если $M = HD$, тогда $D = D \cap M = D \cap H(M \cap T) = (D \cap H)(M \cap T) = M \cap T$. Если $HD = E$, тогда $D = D \cap E \leq (E \cap T) \cap H(E \cap T) \leq (E \cap T \cap H)(E \cap T) = (H \cap T)(E \cap T) = E \cap T$. Но оба эти случая невозможны в силу выбора подгруппы D. Таким образом, $M \cap T$ — максимальная в $E \cap T$ подгруппа и согласно условию леммы подгруппа A X–перестановочна с $M \cap T$. Ввиду леммы 1(3), подгруппа AH/H XH/H–перестановочна с $M/H = (M \cap T)H/H$.

Наконец, пусть либо подгруппа T разрешима, либо H — p-группа, где $p \in \pi'$. Тогда для некоторой холловской π-подгруппы T_π из T имеет место $T_\pi \leq E \cap T$. Действительно, если T — разрешимая подгруппа, это очевидно. Во втором случае из того, что $|E : H| = |H(E \cap T) : H| = |E \cap T : (E \cap T) \cap H|$, по теореме Шура-Цассенхауза заключаем, что $E \cap T$ содержит холловскую π-подгруппу T_π. Поскольку индекс $|T : E \cap T|$ является π'-числом, то T_π является холловской подгруппой в T. Следовательно, $T_\pi H/H = E/H = H(E \cap T_\pi)/H$, $M/H = H(M \cap T_\pi)/H$. Также, как и выше, можно доказать, что $M \cap T_\pi$ — максимальная подгруппа в $E \cap T_\pi$. Поэтому снова получаем, что факторгруппа AH/H XH/H–перестановочна с M/H. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A, X — подгруппы группы G и $H \trianglelefteq G$. Пусть $T \in X_m(A)$ и либо $H \leq A$, либо $H \leq T$. Если H — абелева минимальная нормальная подгруппа в G, либо $(|H|, |T|) = 1$, либо подгруппа T разрешима, тогда $TH/H \in (XH/H)_m(AH/H)$.*

Доказательство. Данная лемма непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 4. *Пусть A, B — собственные подгруппы из G и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.*

Лемма 5 [5, теорема 3]. *Пусть A и B — такие подгруппы группы G, что $G \neq AB$ и $AB^x = B^x A$ для всех $x \in G$. Тогда G имеет такую собственную нормальную подгруппу N, что либо $A \leq N$, либо $B \leq N$.*

Лемма 6. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G. Предположим, что G — A_4-свободна и L — нормальная подгруппа в G. Если факторгруппа G/L p-нильпотентна и $p^3 \nmid |L|$, тогда группа G p-нильпотентна.*

Доказательство. Поскольку факторгруппа G/L p-нильпотентна, то группа G/L содержит нормальную холловскую p'-подгруппу. Пусть M/L — холловская p'-подгруппа в G/L. Тогда $M \trianglelefteq G$ и $p^3 \nmid |M|$. Но тогда, согласно [7, 10.1.9], подгруппа M p-нильпотентна. Поскольку $M \trianglelefteq G$ и индекс $|G : M|$ — p-число, то группа G p-нильпотентна.

Доказательство теоремы.

Предположим, что это утверждение не верно и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть $X = F(G)$.

(1) *Группа G непроста.*

Предположим, что G — простая неабелева группа. Тогда $X = 1$. Пусть P — произвольная 2-максимальная подгруппа некоторой силовской подгруппы группы G. Согласно условию, подгруппа P является X_m–полуперестановочной в G. Поскольку $X = 1$, то это означает, что существует минимальное добавление A к подгруппе P в G такое, что $AP = G$ и каждая максимальная подгруппа любой холловской подгруппы из A перестановочна с P. Пусть A_1 — максимальная подгруппа в A, тогда $PA_1 \neq G$. Пусть $x \in G$, тогда $x = at$, где $t \in P$ и $a \in A$. Значит, $P(A_1)^a = (A_1)^a P$ и поэтому $P(A_1)^x = (P(A_1)^a)^t = ((A_1)^a P)^t = (A_1)^x P$ — подгруппа группы G. Но в этом случае, согласно лемме 5, группа G не является простой. Это противоречие завершает доказательство утверждения (1).

(2) *Минимальная нормальная подгруппа H группы G является абелевой p-группой для некоторого простого числа p.*

Согласно условию теоремы, каждая максимальная подгруппа силовской p-подгруппы группы G имеет разрешимое добавление в G, где p — произвольный простой делитель порядка $|G|$. Это означает, что в группе G существует p-дополнение для всех $p \in \pi(G)$. Но тогда группа G разрешима и, следовательно, минимальная нормальная подгруппа из G является элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого простого p.

(3) *Факторгруппа G/H дисперсивна по Оре для любой минимальной нормальной подгруппы H из G.*

Согласно (1), $H \neq G$. Тогда поскольку $|G/H| < |G|$, то необходимо лишь проверить, что условие верно для G/H. Пусть q — произвольный простой делитель порядка группы G/H, Q/H — силовская q-подгруппа в G/H и Q_1/H — произвольная максимальная в Q/H подгруппа. Если Q_0 — силовская q-подгруппа в Q, то $Q = Q_0H$ и Q_0 является силовской q-подгруппой в G. Покажем, что $Q_1 \cap Q_0$ — максимальная в Q_0 подгруппа. Прежде заметим, что $Q_1 \cap Q_0 \neq Q_0$. Действительно, в противном случае

$Q_0 \leq Q_1$, и значит, $Q_1/H = Q_0H/H = Q/H$, что противоречит выбору подгруппы Q_1/H. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $Q_1 \cap Q_0 < T < Q_0$. Тогда $Q_1 = (Q_1 \cap Q_0)H \leq TH \leq Q_0H = Q$. Но Q_1 — максимальная в Q подгруппа и поэтому либо $Q_1 = TH$, либо $TH = Q_0H$. Если $Q_1 = TH$, то $T = Q_1 \cap T \leq Q_1 \cap Q_0 < T$, что невозможно. Итак, $TH = Q_0H$, и поэтому $Q_0 = Q_0 \cap TH = T(Q_0 \cap H) \leq T(Q_0 \cap Q_1) = T$. Вновь полученное противоречие показывает, что $Q_1 \cap Q_0$ — максимальная в Q_0 подгруппа. Пусть Q_2/H — произвольная 2-максимальная в Q/H подгруппа, содержащаяся в Q_1/H. Тогда аналогично можно показать, что $Q_2 \cap Q_0 = Q_2 \cap Q_1 \cap Q_0$ — 2-максимальная в Q_0 подгруппа. Согласно условию теоремы, подгруппа $Q_2 \cap Q_0$ X_m-полуперестановочна в G и множество $X_m(Q_2 \cap Q_0)$ содержит разрешимую группу, скажем D. Это означает, что $D(Q_2 \cap Q_0) = G$ и каждая максимальная подгруппа любой холловской подгруппы из D X-перестановочна с $Q_2 \cap Q_0$. Согласно (2), H является p-подгруппой для некоторого простого делителя p порядка G. Если $p = q$, то Q является силовской q-подгруппой в G, $Q = Q_0$ и $Q_2 \cap Q_0 = Q_2$. Тогда $H \leq Q_2 \cap Q_0$. Если $p \neq q$, то $H \leq D$. Согласно лемме 3, $DH/H \in (XH/H)_m(Q_2/H)$. Это означает, что факторгруппа $Q_2/H = (Q_2 \cap Q_0)H/H$ является $(XH/H)_m$-полуперестановочной в G/H и множество $(XH/H)_m(Q_2/H)$ содержит разрешимую факторгруппу $DH/H \cong D/(H \cap D)$. Поскольку $XH/H = F(G)H/H \leq F(G/H)$, то, согласно лемме 1(5), факторгруппа Q_2/H является $F(G/H)_m$-полуперестановочной в G/H и $DH/H \in F(G/H)_m(Q_2/H)$. Этим завершено доказательство утверждения (3).

(4) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная H подгруппа и* $\Phi(G) = 1$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Согласно (3), факторгруппа G/N дисперсивна по Оре, где N — минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $\Phi(G)$. Поскольку класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то группа G дисперсивна по Оре, противоречие. Значит $\Phi(G) = 1$. Если группа G содержит две различные минимальные нормальные подгруппы L и N, тогда факторгруппы G/L и G/N обе дисперсивны по Оре. Следовательно, группа $G \cong G/L \cap N \lesssim G/L \times G/N$ дисперсивна по Оре. Это противоречие завершает доказательство (4).

(5) $G = [H]M$, *где M — дисперсивная по Оре максимальная в G подгруппа, и* $H = O_p(G) = C_G(H) = X$.

В силу (4), для некоторой максимальной в G подгруппы M имеет место $G = HM$. Понятно, что $H \cap M = 1$. Кроме того, в силу (3), подгруппа $M \cong G/H$ дисперсивна по Оре. Пусть $C = C_G(H)$. Согласно (4), $M_G = 1$, и поэтому $C \cap M = 1$. Следовательно, $C = C \cap HM = H(C \cap M) = H$. Теперь утверждение (5) вытекает из того хорошо известного факта, что подгруппа Фиттинга содержится в централизаторе любого главного фактора группы.

(6) *Группа G q-нильпотентна, где q — наименьший простой делитель порядка $|G|$.*

Предположим, что это неверно. Если $q \neq p$, тогда согласно (2) и (3), группа G q-нильпотентна. Значит $q = p$. Пусть M_q — силовская q-подгруппа в M и G_q — силовская q-подгруппа группы G, содержащая M_q. Очевидно, $|G_q : M_q| = |H|$. Если $q^3 \nmid |H|$, то согласно лемме 6, группа G q-нильпотентна, противоречие. Значит $|G_q : M_q| \geq q^3$ и, следовательно, G_q содержит такую 2-максимальную подгруппу P, что $M_q < P$ и $1 \neq H \cap P \neq H$. Согласно условию теоремы и ввиду (5), подгруппа P H_m-полуперестановочна в G и группа G содержит такую разрешимую подгруппу T, что $G = PT$ и для каждой максимальной подгруппы T_1 любой холловской подгруппы из T для некоторого элемента $x \in H$ имеет место $PT_1{}^x = T_1{}^xP < G$. Пусть T_1 — максимальная подгруппа в T, содержащая холловскую q'-подгруппу из T, и $B = PT_1{}^x$. Поскольку $HB = G$ и B — максимальная подгруппа группы G, то, согласно (4) и (5), $G = [H]B$. Но $P \leq B = PT_1{}^x$ и, следовательно, имеет место $H \cap P = 1$. Это противоречие завершает доказательство (6).

(7) *Заключительное противоречие.*

Согласно (6), группа G содержит холловскую нормальную q'-подгруппу N, где q — наименьший простой делитель порядка $|G|$. Понятно, что $N \neq 1$, и поэтому $H \subseteq N$. Таким образом, $H \subseteq F(N)$. С другой стороны, поскольку $F(N)$ является характеристической подгруппой в N, то $F(N)$ — нильпотентная нормальная подгруппа в G и поэтому $F(N) \subseteq H$. Значит, $F(N) = H = F(G)$. Понятно также, что условие теоремы выполняется в N, поэтому подгруппа N дисперсивна по Оре. Но тогда, очевидно, группа G является дисперсивной по Оре. Таким образом, теорема доказана.

Abstract. The paper considers X_m-semipermutable subgroups of finite group. Let X be a non-empty subset of a group G. Then we call a subgroup A of G a *X_m-semipermutable subgroup of* G if A has a minimal supplement T in G such that for every maximal subgroup M of any Hall subgroup T_1 of T there exists an ele-ment $x \in X$ such that $AM^x = M^xA$. In this paper, we study finite groups with given systems of X_m-semipermutable subgroups.

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin–New York: Walter de gruyter, 1992.

2. Guo, W. Finite Groups with given X_m–semipermutable Subgroups / W. Guo [и др.]. — Гомель, 2007. — № 8. — 15 с. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины).

3. Guo, W. X–semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra, (принята к опубликованию в 2007 году).

4. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — № 60. — P. 409—434.

5. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. — 1961. — Vol. 12. — P. 90—93.

6. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5. — P. 431—460.

7. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson — New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982.

8. Skiba, A.N. H–permutable subgroups / A.N. Skiba // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 2003. — № 4(19). — С. 37—39.

9. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein — Passaic, N.J.: Polygonal Publishen House, 1982. — 382 p.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины,

Брянская сельскохозяйственная
академия

Поступило 15.02.08