Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Классы конечных групп, замкнутые относительно произведения формационных подгрупп

О. А. Мокеева, В. Н. Семенчук

Любая конечная группа вида $G = AB$, где A и B — p-замкнутые подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p, является p-замкнутой.

В работе [1] В. Н. Тютянов доказал, что любая конечная группа вида $G = AB$, где A и B — p-нильпотентные подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p, является p-нильпотентной группой.

Сформулируем следующую общую проблему.

Проблема. *Найти классы конечных групп $\mathfrak{F}$, содержащие любую конечную группу $G = AB$, где A и B принадлежат $\mathfrak{F}$ и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p.*

В данной работе найдены новые классы групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющие сформулированной выше проблеме. В частности, одним из таких классов является класс p-разрешимых групп с p-длиной $\leqslant 1$. Важную роль при получении основных результатов сыграли формации Шеметкова, то есть такие формации $\mathfrak{F}$, у которых любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

На протяжении всей работы мы будем пользоваться терминологией монографии [2]. Напомним некоторые обозначения и понятия.

Минимальной не $\mathfrak{F}$-группой мы будем называть группу, не принадлежащую некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Множество таких групп обозначают $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{G}_\pi$ — множество всех π-групп, $\mathfrak{G}$ — множество всех разрешимых групп. Все другие определения и обозначения можно найти в [2].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ — непустые формации. Тогда $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$.*

Доказательство. Пусть G — произвольная группа из $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. Тогда $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Отсюда следует,что $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1$ и $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_2$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$.

Пусть G — произвольная группа из $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3$ и $G \in \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Тогда $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1$ и $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_2$. Итак, $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. А это значит $G \in (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, а f — ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через $\tau(\mathfrak{F})$ — множество простых чисел из $\pi(\mathfrak{F})$ таких, что $f(p) \neq \mathfrak{F}$, где p — простое число из $\tau(\mathfrak{F})$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, f — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Доказательство. Известно, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ справедливо следующее равенство

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \bigcap_{q\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

По лемме 1

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p)(\bigcap_{q\in\pi(\mathfrak{F})\setminus\tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'})\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} = \bigcap_{p\in\tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Лемма доказана.

Определение 1. *Формация $\mathfrak{F}$ называется p-формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с нормальной p-силовской подгруппой.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ — p-формация Шеметкова;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $p \in \pi$ и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Из леммы 2 следует, что любую локальную формацию можно представить в виде

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{F}$ — p-формация Шеметкова, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Действительно, очевидно, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Покажем обратное включение. Пусть G — группа наименьшего порядка из

$$\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная формация, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $\Phi(G) = 1$. Нетрудно показать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $C_G(N) = N$. Согласно условию G либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с нормальной p-силовской подгруппой.

Пусть $|G| = q$. Так как $G \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть G — группа Шмидта и $G = G_p \rtimes G_q$, где $|G_q| = q$. Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда из $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$. А это значит, что $q \in \pi(f(p))$. Так как

$|G_q| = q$, то $G_q \in f(p)$. Но тогда $G_pG_q/G_p \simeq G_q \in f(p)$. Так как f — полный экран, то $G = G_pG_q \in f(p)$. Так как f — внутренний экран, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что из 2) следует 1).

Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})})$. Согласно условию, G — разрешимая группа. Пусть $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем N — p-группа и $C_G(N) = N$. Согласно теореме 1.5 из [3], $G = N \rtimes M$, где $M \in \mathcal{M}(\varphi(p))$, где φ — полный локальный экран формации $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi$. Согласно следствию 7.13 из [4], $\varphi(p) = \mathfrak{G}_\pi$. А это значит, что $|M| = r$, где $r \notin \pi$. Отсюда нетрудно заметить, что G — группа Шмидта. Согласно лемме 2 из [5] G — либо группа Шмидта с нормальной p-силовской подгруппой, либо группа простого порядка. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная p-формация Шеметкова. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит любую p-разрешимую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Тогда нетрудно доказать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $\Phi(G) = 1$ и $C_G(N) = N$. Так как G — p-разрешимая группа, то либо N — p-группа, либо p'-группа. Если N — p'-группа, то из того, что $G/N \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть N — p-группа. Согласно условию, $N \subseteq A$ и $N \subseteq B$. Так как $A \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ и $C_A(N) = N$, то $O_{p'}(A) = 1$. Отсюда следует, что $A \in \mathfrak{G}_\pi$. Аналогичным образом получаем, что $B \in \mathfrak{G}_\pi$. Отсюда и группа $G = AB \in \mathfrak{G}_\pi$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание. *Пересечение всех локальных наследственных p-формаций Шеметкова, есть формация p-нильпотентных групп.*

Напомним, что подгруппа H группы G называют $\mathfrak{F}$-*субнормальной,* если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В работе [6] было доказано, что любая формация Шеметкова $\mathfrak{F}$ замкнута относительно произведения $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная p-формация Шеметкова. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p и либо A, либо B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная p-формация Шеметкова. Тогда, согласно теореме 1, она имеет следующее строение

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_\pi \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π — некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p.

Пусть G — группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, такая, что $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p и A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Нетрудно показать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $\Phi(G) = 1$.

Пусть N — абелева группа и N — q-группа. Если $q \neq p$, то из того факта, что $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Если N — p-группа, то, как и в теореме 2, можно показать, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть N — неабелева группа. В этом случае

$$N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$$

есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = AN$. Так как A — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$, то нетрудно показать, что $H = AN \neq G$. Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq AN \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

Очевидно, что $A^H \cap B$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа A^H. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $B \in \mathfrak{F}$, то $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что индексы $|A^H : A|$, $|A^H : A^H \cap B|$ не делятся на p. Тогда по индукции $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то $A^H \subseteq C_G(N) = 1$. Получили противоречие. Значит, $A^H \cap N \neq 1$. Так как A^H — нормальная подгруппа из AN, то $A^H \cap N$ — нормальная подгруппа из N. Но тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \ldots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} — изоморфные неабелевы простые группы, $j = 1, 2, \ldots, k$. Так как $A^H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда нетрудно показать, что $N \in \mathfrak{F}$. Если $|N|$ делится на p, то из того , что $N \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi}$, $p \in \pi$ следует, что $O_{p'}(N) \neq 1$ — нормальная подгруппа группы G. Противоречие. Если N — p'-группа, то ясно, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема доказана.

Определение 2. *Формация $\mathfrak{F}$ называется p'-формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта с ненормальной p-силовской подгруппой, либо группой простого порядка.*

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ — p'-формация Шеметкова;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi}\mathfrak{G}_{p'} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $p \in \pi$ и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2).

Ясно, что формация $\mathfrak{F}$ является формацией Шеметкова. Тогда, согласно теореме 24.3 из [4], имеет следующее строение

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'}\mathfrak{G}_{\pi(f(q))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}, \qquad (1)$$

где f — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Вначале докажем, что $p' \cap \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(f(q))$, где q — любое простое число из $\pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что это не так. Тогда найдется простое число $r \in p' \cap \pi(\mathfrak{F})$, но $r \notin \pi(f(q))$. Обозначим через M группу простого порядка r. Очевидно, что $M \in \mathfrak{F}$ и $M \in \mathcal{M}(f(q))$. Так как $O_q(M) = 1$, то существует точный неприводимый $F_q(M)$ — модуль N, где F_q — поле из q элементов. Пусть $\Gamma = N \rtimes M$. Покажем, что $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как N точен, то $C_{\Gamma}(N) = N$. Так как $M \notin f(q)$, то, очевидно, что $\Gamma \notin \mathfrak{F}$. Пусть L — произвольная максимальная подгруппа из Γ. Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то нетрудно заметить, что $L \in \mathfrak{F}$. Итак, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как $r \neq p$, то это невозможно ввиду того, что $\mathfrak{F}$ — p'-формация Шеметкова. Итак, $p' \cap \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(f(q))$ для любого q из $\pi(\mathfrak{F})$. Отсюда в частности следует, что $\pi(f(p)) = \pi(\mathfrak{F})$. Учитывая данные факты, нетрудно показать, что равенство (1) принимает следующий вид

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}} \mathfrak{S}_{q'} \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}. \qquad (2)$$

Используя лемму 1, равенство (2) приводится к виду

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π — некоторое множество простых чисел, содержащее число p.

Покажем, что из 2) следует 1).

Действительно, что G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Согласно условию, G разрешима. Пусть $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.5 из [3], $G = N \leftthreetimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа, N — q-группа и $M \in \mathcal{M}(f(q))$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если $q \in \pi$, то из того факта, что $G/N \in \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$ следует, что $G \in \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Получили противоречие. Тогда $q \in \pi$. Согласно следствию 7.13 из [4], локальная формация $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'}$ имеет полный локальный экран h такой, что $h(q) = \mathfrak{S}_{p'}$. Очевидно, что $f(q) = \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{F}$. Так как $M \in \mathcal{M}(f(q))$, то очевидно, что $|M| = p$. Итак, мы показали, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G с $\Phi(G) = 1$ либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с ненормальной p-силовской подгруппой. Согласно лемме 2 из [5], это же верно, когда $\Phi(G) \neq 1$. Итак, $\mathfrak{F}$ — p'-формация Шеметкова. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная p'-формация Шеметкова. Формация $\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация p-замкнутых групп.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — p'-формация Шеметкова. Согласно теореме 4, она имеет следующее строение

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где $p \in \pi$. Если $\pi = \{p\}$, то $\mathfrak{F}$ — формация p-замкнутых групп. Так как индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p, то A и B содержат силовскую p-подгруппу группы G. По условию A и B p-замкнуты. Отсюда следует, что G p-замкнута. Пусть множество π содержит простое число $q \neq p$. Покажем, что в этом случае утверждение теоремы неверно. Пусть Z_q — группа порядка q. Пусть r — простое число отличное от p и q. Так как $O_r(Z_q) = 1$, то существует точный неприводимый $F_r(Z_q)$ — модуль N, где F_r — поле из r элементов. Пусть $\Gamma = N \leftthreetimes Z_q$. Так как $O_q(\Gamma) = 1$ и Γ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, то согласно лемме 18.8 из [4] существует точный неприводимый $F_q(\Gamma)$ — модуль L, где F_q — поле из q элементов. Пусть $\Gamma_1 = L \leftthreetimes (N \leftthreetimes Z_q)$. Так как $O_p(\Gamma_1) = 1$, то как и выше существует точный неприводимый $F_p(\Gamma_1)$ — модуль T, где F_p — поле из p элементов. Пусть $\Gamma_2 = T \leftthreetimes \Gamma_1 = T \leftthreetimes (L \leftthreetimes (N \leftthreetimes Z_q))$.

Рассмотрим следующие две подгруппы $A = TLN$ и $B = TZ_q$. Ясно, что $\Gamma_2 = AB$. Подгруппы A и B $\{p, q\}$-замкнуты, причем индексы $|\Gamma_2 : A|$, $|\Gamma_2 : B|$ не делятся на p. Если бы группа Γ_2 была бы $\{p, q\}$-замкнута, то тогда Z_q есть нормальная подгруппа в группе $N \leftthreetimes Z_q$, что невозможно. Итак, мы показали, что утверждение теоремы верно только тогда, когда $\pi = \{p\}$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть G — p-разрешимая группа. $G = AB$, где $l_p(A) \leqslant 1$, $l_p(B) \leqslant 1$, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p. Тогда $l_p(G) \leqslant 1$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа G. Так как G — p-разрешимая группа, то N либо

p-группа, либо p'-группа. Если N — p'-группа, то $l_p(G) = l_p(G/N)$. Согласно индукции, $l_p(G) = l_p(G/N) \leqslant 1$. Получили противоречие.

Пусть N — p-группа. Так как $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p, то $N \subseteq A \cap B$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$, то $C_G(N) = N$. Рассмотрим подгруппу $F_p(A)$. Так как $N \subseteq F_p(A)$, N — p-группа, $C_A(N) = N$, то, нетрудно показать, что $F_p(A)$ — p-группа. Так как $l_p(A) \leqslant 1$, то A — p-замкнутая группа. Аналогичным образом можно доказать, что B — p-замкнутая группа. Отсюда следует, что G — p-замкнутая группа. А это значит, что $l_p(G) \leqslant 1$. Получим противоречие. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ гранд Ф06МС-017.

Abstract. Classes of finite groups closed with regard to the product of formation subgroups are considered in the paper.

Литература

1. Тютянов, В. Н. Факторизации π-нильпотентными сомножителями / В. Н. Тютянов // Математический сборник. — 1996. — Т. 187, № 9. — С. 97-102.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — Москва: Наука, 1978. — 272 с.

3. Семенчук, В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В. Н. Семенчук // Алгебра и логика. — 1979. — Т. 18, № 3. — С. 348-382.

4. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. — Москва: Наука, 1989. — 256 с.

5. Семенчук, В. Н. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации / В. Н. Семенчук // Математические заметки. — 1988. — Т. 43, № 4. — С. 452-459.

6. Семенчук, В. Н. Сверхрадикальные формации / В. Н. Семенчук, Л. А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. — 2000. — Т. 44, № 5. — С. 23-25.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 15.02.08