Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(41), 2007

512.552

Колчаны треугольных черепичных порядков

В. Н. Дармосюк

Обозначим через $M_n(\mathrm{Z})$ кольцо всех квадратных $n\times n$-матриц над кольцом целых чисел Z. Пусть $\mathcal{E} = M_n(\mathrm{Z})$.

Определение 1. *Матрица $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ называется матрицей показателей, если $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, ..., n$ и $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, ..., n$. Матрица показателей $\mathcal{E}$ называется приведенной, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, ..., n$.*

Пусть $T_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \alpha & \dots & \dots & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha \geqslant 1$, $T_{n,\alpha} \in M_n(Z)$. Очевидно, $T_{n,\alpha}$ является циклической горенштейновой матрицей с $\sigma = \sigma(T_{n,\alpha}) = (n\, n-1 \dots 2\, 1)$. Запишем $J_n^+(0) = e_{12} + e_{23} + \dots + e_{n-1\,n}$. Легко видеть, что $[Q(T_{n,1})] = J_n^+(0) + e_{n1}$ и $[Q(T_{n,\alpha})] = E_n + J_n^+(0) + e_{n1}$, где E_n единичная матрица и $\alpha \geqslant 2$.

Пусть $T_{n,1} = H_n$, тогда $Q(H_n)$ является простым циклом C_n, а колчан $Q(T_{n,\alpha})$ $(\alpha \geqslant 2)$ - простой цикл с петлей в каждой вершине LC_n.

Напомним, что черепичным порядком называется первичное двусторонне нетерово полусовершенное полудистрибутивное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона.

Мы будем использовать следующие обозначения: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, где $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ матрица показателей черепичного порядка A. В этом случае $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, где e_{ij} матричные единицы. Если черепичный порядок является приведенным, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, ..., n$ и $i \neq j$, то есть матрица $\mathcal{E}(A)$ является приведенной.

Определение 2. *Две матрицы показателей $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ и $\Theta = (\theta_{ij})$ называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой преобразованиями следующих двух типов:*

1. *Вычитание целого числа из элементов i-ой строки с одновременным сложением к элементам i-го столбца этого числа;*

2. *Одновременная перестановка двух строк и столбцов с теми же номерами.*

Напомним, что правый (левый) A -модуль $M(N)$ называется правой (левой) A - решеткой, если $M(N)$ является конечнопорожденным свободным $\mathcal{O}$ - модулем.

Отметим, что все конечнопорожденные проективные A - модули являются A - решетками.

Пусть $M_n(\mathrm{D})$ является классическим кольцом частных черепичного порядка A. Обозначим через $S_r(A)$ ($S_l(A)$) структуру (по включению), образованную всеми A - решетками, лежащими в простом правом $M_n(\mathrm{D})$ - модуле U (соответственно в простом левом $M_n(\mathrm{D})$ - модуле V). Такие A -решетки называются неприводимыми A - решетками. Отметим, что каждый простой правый $M_n(\mathrm{D})$ - модуль изоморфен простому правому $M_n(\mathrm{D})$ - модулю U с D - базисом $e_1, ..., e_n$ таким, что $e_i e_{jk} = \delta_{ij} e_k$, где $e_{jk} \in M_n(D)$ - матричные единицы. Каждый простой левый $M_n(\mathrm{D})$ - модуль изоморфен левому простому модулю V с D - базисом $e_1, ..., e_n$ таким, что $e_{ij} e_k = \delta_{jk} e_i$.

Пусть $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ -черепичный порядок и $U(V)$ простой правый (левый)$M_n(\mathrm{D})$ - модуль.

Тогда любая правая (соответственно левая) A - решетка $M(N)$, лежащая в $U(V)$, является A - модулем с $\mathcal{O}$ - базисом $(\pi^{\alpha_1} e_1, ..., \pi^{\alpha_n} e_n)$, где

($\bullet$) $\alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j$ для правого случая

($\bullet\bullet$) $\alpha_{ij} + \alpha_j \geq \alpha_i$ для левого случая.

Таким образом, правые неприводимые A - решетки могут быть отожествлены с целочисленными векторами $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, удовлетворяющими условиям ($\bullet$). Обозначим через $(\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$ векторстолбец с координатами $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Очевидно, всякая левая неприводимая A - решетка может быть отожествлена с $(\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$ целочисленным векторстолбцом, удовлетворяющим условиям ($\bullet\bullet$).

Очевидно, две неприводимые A - решетки $M_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $M_2 = (\beta_1, ..., \beta_n)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i + z$ для $i = 1, ..., n$ и фиксированного $z \in \mathbf{Z}$.

Отметим, что структуры $S_r(A)$ и $S_l(A)$ не зависят от выбора простых $M_n(\mathrm{D})$ - модулей U та V.

В дальнейшем мы будем рассматривать правые неприводимые A - решетки. Для них справедливы следующие отношения порядка, суммы и пересечения. Пусть $M_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $M_2 = (\beta_1, ..., \beta_n)$. Тогда $M_1 \supseteq M_2$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = 1, ..., n$. Обозначим $M_1 + M_2 = (\delta_1, ..., \delta_n)$. Очевидно, $\delta_1 = min(\alpha_1, \beta_1)$, $\delta_2 = min(\alpha_2, \beta_2), ..., \delta_n = min(\alpha_n, \beta_n)$. Если $M_1 \bigcap M_2 = (\theta_1, ..., \theta_n)$, то $\theta_i = max(\alpha_i, \beta_j)$ для $i = 1, ..., n$.

Определение 3. *Черепичный порядок A будем называть горенштейновым черепичным порядком, если A является биективной A - решеткой, то есть $A^* = Hom_{\mathcal{O}}(A, \mathcal{O})$ является проективной левой A - решеткой.*

Определение 4. *Черепичный порядок $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ называется треугольным, если матрица показателей $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ является треугольной, то есть $\alpha_{ij} = 0$ для $i \leq j$.*

В [2] доказана следующая теорема:

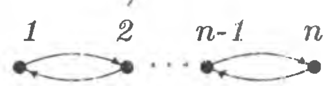
Теорема 5. *([2], p.4239)*

Приведенный черепичный порядок $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ является горенштейновым треугольным черепичным порядком тогда и только тогда, когда $Q(A)$ является простым циклом C_n или колчаном LC_n. В таком случае A является изоморфным порядку $T_{k,s}$.

Рассмотрим два треугольных черепичных порядка, которые широко известны ([4], [5], [6]).

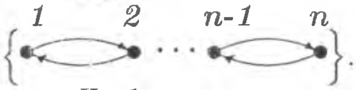
Обозначим через $\Omega_n(\mathcal{O})$ черепичный треугольный порядок с матрицей показателей

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что колчан $\Omega_n(\mathcal{O})$ имеет вид .

Покажем, что любой приведенный черепичный порядок с таким колчаном изоморфен треугольному.

Введем следующие обозначения: $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ матрица показателей черепичного порядка A, $P_i = (\alpha_{ij}, ..., 0, ..., \alpha_{in})$, $P_iR = (\alpha_{i1}, ..., 1, ..., \alpha_{in})$ для $i = 1, ..., n$.

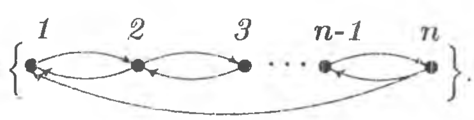
Предположим, что A приведенный порядок и $Q(A) =$ .
Покажем, что A изоморфен приведенному треугольному порядку. Любой черепичный порядок изоморфен черепичному порядку с нулевой первой строкой, то есть $P_1 = (0\ 0\ ...\ 0)$ и $P_1R = (1\ 0\ ...\ 0)$. По определению колчана $Q(A)$ имеем: $P_1R = \varphi(P_2)$. Очевидно, отображение φ является мономорфизмом и $\varphi(P_2) = (\alpha_{21}+y, y, \alpha_{23}+y, ..., \alpha_{2n} + y) = (1, 0, 0, ..., 0)$, то есть $y = 0$, $\alpha_{21} = 1$ и $\alpha_{23} = \alpha_{24} = ... = \alpha_{2n} = 1$, то есть $P_2 = (1, 0, 0, ..., 0)$. Далее $P_2R = \varphi(P_1 \oplus P_3) = \varphi(P_1) + \varphi(P_3) = (z, z, z, ..., z, z) + (\alpha_{31} + y, \alpha_{32}+y, y, ..., \alpha_{3n}+y)$. Обозначим через $(\alpha, \beta) = min(\alpha, \beta)$. Имеем $P_2R = (1\ 1\ 0\ ...\ 0\ 0)$. Поэтому $(z, y) = 0$, откуда $z \geq 0$ и $y \geq 0$. Если $z = 0$, то $(0\ 0\ 0\ ...\ 0\ 0) = (1\ 1\ 0\ ...\ 0\ 0)$. Получили противоречие. Поэтому $y = 0$, $z \geq 1$ и $(z, \alpha_{3k}) = 0$ при $k \geq 4$. Продолжая этот процесс получим, что порядок A является треугольным. Отметим также, что следующее бесконечное множество приведенных треугольных матриц показателей $\mathcal{E}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha+2 & \alpha+2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет колчан

$Q(\mathcal{E}_\alpha) =$ .

Рассмотрим приведенный треугольный черепичный порядок $\Lambda_n(\mathcal{O})$ с матрицей показателей

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что колчан $Q(\Lambda_n(\mathcal{O}))$ имеет следующий вид:

$Q_n =$ .

Как и выше, легко показывается, что всякий приведенный черепичный порядок A с колчаном Q_n изоморфен приведенному треугольному порядку. Для этого снова первую строку делаем нулевой и проводим вычисления, учитывая вид колчана Q_n. В заключение приведем бесконечное множество приведенных треугольных матриц показателей $\Lambda_4(\alpha)$ с колчаном Q_4: $\Lambda_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что $\Lambda_4(1) = \Lambda_4$.

Пусть $\mathcal{E}$ такая приведенная матрица показателей, что $[Q(\mathcal{E})] =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Так как $Q(\mathcal{E})$ не меняется при преобразованиях первого типа, мы можем считать, что первая строка нулевая. Обозначим $P_1 = (0\,0\,0 \dots 0)$. Тогда $P_1 R = (1\,0\,0 \dots 0\,0)$ и $P(P_1 R) \cong P_2$, то есть $P_1 R = (\alpha_{21} + z\,, z\,, \alpha_{23} + z, \dots, \alpha_{2n} + z)$.

Поэтому получаем: $P_1 R = (100...00) = (\alpha_{21} + z,\ z\,, \alpha_{23} + z,\ \dots,\ \alpha_{2n} + z)$. Следовательно, $z = 0$ и $(\alpha_{21}\, 0\, \alpha_{23} \,..\, \alpha_{2n}) = (1\,0\,0 \dots 00)$, то есть $P_2 = (1\,0\,0 \dots 0\,0)$. Так как $P_2 R = (1\,1\,0\,0 \dots 0\,0) = (\alpha_{31} + z,\ \alpha_{32} + z,\ z,\ \alpha_{34} + z,\ \dots,\ \alpha_{3n} + z)$, то $z = 0$ и $P_3 = (1\,1\,0\,0 \dots 0\,0)$. Продолжая этот процесс, мы получим, что $P_n = (1\,1 \dots 1\,0)$ и $P_n R = (1\,1\,1 \dots 1) \cong P_1$. Таким образом, колчан C_n является жестким и единственная, с точностью до эквивалентности, матрица показателей, колчаном которой он является, это матрица H_n.

Предположим теперь, что допустимый колчан Q состоит из одного простого цикла C_n такого, что хотя бы в одной вершине нет петли. Без ограничения общности, мы можем считать, что это первая вершина и первая строка нулевая. Как и выше, $P_1 R = P_2$, то есть $P_2 = (1\,0\,0 \dots 0\,0)$. Поэтому во второй вершине тоже нет петли и $P_2 R = P_3$, то есть $P_3 = (1\,1\,0 \dots 0\,0)$. В вершине 3 тоже нет петли. Поэтому $P_3 R = P_4 = (1\,1\,1\,0 \dots 0\,0)$ и в вершине 4 тоже нет петли. Продолжая этот процесс, получим, что $P_n = P_{n-1} R = (1\,1 \dots .\,1\,1\,0)$ и $P_n R \cong P_1$, то есть наша матрица показателей совпадает с матрицей H_n.

Следствие 6. *Если допустимый колчан, состоящий только из простого цикла C_n и петель в некоторых вершинах, не имеет петли, хотя б в одной вершине, то он не имеет петель во всех вершинах и совпадает с простым циклом C_n.*

Рассмотрим теперь приведенные матрицы показателей с колчаном LC_n. Пусть $\mathcal{E}$ такая матрица, то есть $Q(\mathcal{E}) = LC_n$. Без ограничения общности можно считать, что первая строка матрицы $\mathcal{E}$ нулевая. Имеем $(1\,0\,0 \dots 0\,0) = (z\,z \dots z\,z) + (\alpha_{21} + y,\ y,\ \alpha_{23} + y,\ \dots,\ \alpha_{2n} + y)$, откуда $(z, y) = 0$. Поэтому $y = 0$ и $(1\,0 \dots 0) = (z\,z \dots z) + (\alpha_{21}\,0\,0 \dots 0)$. Так как в вершине 2 есть петля, то $\alpha_{21} \geqslant 2$. Следовательно, $P_1 = (0\,0\,0 \dots 0)$, $P_2 = (\alpha\,0\,0 \dots 0\,0)$, $\alpha \geqslant 2$. Очевидно, $P_2 R = (\alpha\,1\,0 \dots 0\,0) = (z + \alpha\, z\, z \dots z) + (\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ 0 \dots \alpha_{3n})$. Отсюда следует, что $P_3 = (\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,0 \dots 0)$, то есть мы имеем такую подматрицу: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_{31} \geq \alpha$ и $\alpha_{31} \geqslant \alpha_{32} \geqslant 2$. Покажем, что матрица $\mathcal{E}$ имеет треугольный вид. Действительно, $P_3 R = (\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,1\,0 \dots 0) = (\alpha_{31} + z\,\alpha_{32} + z\ z\,z \dots z) + (\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}\,0\,\alpha_{45} \dots \alpha_{4n})$, откуда $P_4 = (\alpha_{41}\,\alpha_{42}\,\alpha_{43}\,0 \dots 0)$. Снова, $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ не меньше двух. $P_4 R = (\alpha_{41}\ \alpha_{42}\ \alpha_{43}\ 1\ 0\ \dots\ 0) = (\alpha_{41} + z, \alpha_{42} + z, \alpha_{43} + z, z, \dots, z) + (\alpha_{51}\ \alpha_{52}\ \alpha_{53}\ \alpha_{54}\ 0\ \alpha_{56}\ \dots\ \alpha_{5n})$, откуда $\alpha_{56} = \dots = \alpha_{5n} = 0$ и $\alpha_{5j} \geq 2$ при $1 \leq j \leq 5$. Рассмотрим $P_k R$, где $k \leq n - 1$. По предположению индукции мы можем считать, что

$P_1 = (0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0)$

$P_2 = (\alpha\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0)$

$P_3 = (\alpha_{31}\ \alpha_{32}\ 0\ \dots\ 0\ 0)$

....

$P_k = (\alpha_{k1}\ \alpha_{k2}\ \dots\ \alpha_{kk-1}\ 0\ \dots\ 0)$

$P_k R = (\alpha_{k1}\ \alpha_{k2}\ \dots\ \alpha_{kk-1}\ 1\ 0\ 0) = (\alpha_{k1} + z\ \alpha_{k2} + z\ \dots\ \alpha_{kk\text{-}1} + z\ z\ \dots\ z) +$

$+ (\alpha_{k+11} \dots \alpha_{k+1k}\ 0\ \alpha_{k+1k+2} \dots \alpha_{k+1n})$, то есть $\alpha_{k+1k-2} = \dots = \alpha_{k+1n} = 0$.

Отсюда следует, что матрица $\mathcal{E}$ треугольная и ее колчан является LC_n. Рассмотрим $P_n R = (\alpha_{n1} \dots \alpha_{nn-1}\ 1) = (z \dots z) + (\alpha_{n1} + y, \dots, \alpha_{nn-1} + y, 1 + y)$. Отсюда следует, что $(z, 1+y) = 1$. Если $z = 1$, то в вершине n нет петли, что является противоречием. Поэтому $1 + y = 1$ и $y = 0$. Можно считать, что $\alpha_{n1} \geqslant \alpha_{n2} \geqslant \dots \geqslant \alpha_{nn-1} \geqslant 2$. Вообще можно считать, что все ненулевые $\alpha_{ij} \geqslant 2$.

Дальше из вида колчана легко следует, что $\mathcal{E} = T_{n,\alpha}$ при $\alpha \geqslant 2$. Обратно, $Q\,(T_{n,\alpha}) = LC_n$.

Теорема 7. *Приведенный черепичный порядок $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ является горенштейновым треугольным порядком тогда и только тогда, когда $B = A/\pi A$ является полуцепным кольцом.*

Доказательство в одну сторону следует из теоремы 5 и теоремы 12.3.11 [3], то есть в случае, когда A является приведенным черепичным порядком с колчаном C_n или LC_n, то $Q(B)$ является простым циклом. Наоборот, предположим, что A приведенный черепичный порядок такой, что $B = A/\pi A$ является полуцепным кольцом. По предложению 7.6 ([1], 170) факторкольцо B является нетеровым слабопервичным кольцом. Поэтому по теореме 7.5 ([1], 170) колчан кольца B является простым циклом C_n. По предложению 7.7 ([1], 170) и сказанному выше, получаем, что колчан $Q\,(A)$ черепичного порядка A является либо C_n, либо LC_n, откуда $\mathcal{E}\,(A) = T_{n,\alpha}$ или $\mathcal{E}\,(A) = H_n$.

Abstract. The quivers of triangular tiled orders are considered in the paper. Let A be a reduced tile with the quiver $Q(A)$. If $Q(A)$ is either a simple cycle or a simple cycle with a loop in each vertex, then A is isomorphic to Gorenstein triangular order. In this case $A/\pi A$ is serial. Conversely, if $A/\pi A$ is serial, the A is isomorphic to the triangular reduced tiled order.

Литература

1. Кириченко В.В., Журавлев В.Н., Хибина М.А. Черепичные порядки и их свойства // Известия Гомельского университета имени Ф. Скорины. — 2006. — №3(36). — С. 155–172.

2. Roggenkamp K. W., Kirichenko V. V., Khibina M. A., and Zhuravlev V. N. Gorenstein tiled orders // Comm. in Algebra. — 2001. — Vol. 29, No. 9. — P. 4231–4247.

3. Hazewinkel M., Gubareni N. and Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications. — 2004. — Vol. 575, Kluwer Acad. Publish.

4. Jategaonkar V. A. Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring, // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 38. P. 8–14.

5. Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 196. — P. 313–330.

6. Tarsy R. B. Global dimension of orders // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 151. — P. 335–340.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-Mail: valendar@mail.ru

Поступило 12.10.06