Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(41), 2007

УДК 512.542

О минимальных τ-значных ω-композиционных спутниках формаций

М. В. Задорожнюк, А. Н. Скиба

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется терминология, принятая в [1, 2]. Напомним лишь некоторые определения и обозначения.

Пусть $\mathfrak{L}$ – некоторый непустой класс простых абелевых групп, $\omega = \pi(\mathfrak{L})$. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-композиционным спутником. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение всех централизаторов главных p-факторов группы G ($C^p(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Символы $R_\omega(G)$ и $C(G)$ обозначают произведение всех разрешимых ω-подгрупп группы G и множество всех абелевых композиционных факторов группы G, соответственно.

Для произвольного ω-композиционного спутника f вводится класс групп

$$CF_\omega(f) = \{G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(C(G)) \cap \omega\}.$$

Для произвольных ω-композиционных спутников f_1 и f_2 положим, что $f_1 \leq f_2$ тогда и только тогда, когда $f_1(a) \subseteq f_2(a)$ для любого числа $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называется ω-композиционной формацией, а f – ее ω-композиционным спутником.

Непустая совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Спутник f назовем Θ-значным, если все его значения принадлежат Θ.

Напомним, что подгрупповой функтор (в смысле Скибы [1]) сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место

$$H^\varphi \in \tau(B) \text{ и } T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Символом sn обозначим такой подгрупповой функтор, что для любой группы G множество $sn(G)$ совпадает со множеством всех субнормальных подгрупп группы G.

Для произвольных подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 положим, что $\tau_1 \leq \tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G.

В данной работе мы рассмотрим только такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G каждая ее подгруппа $H \in \tau(G)$ является субнормальной в G.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ ω-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначается такой ω-композиционный спутник, что

$$(\bigcap_{i \in I} f_i)(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$$

для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех τ-значных ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2 [2], $\bigcap_{i \in I} f_i$ является τ-значным ω-

композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$ и такой спутник называется минимальным τ-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$.

В данной работе дано описание минимальных τ-значных ω-композиционных спутников формаций.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Положим

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}\,(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(C(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(C(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Пересечение всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$ и называется τ-замкнутой ω-композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,\{G\}$ пишут $c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(G)$ и формация такого типа называется однопорожденной τ-замкнутой ω-композиционной формацией.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{M}$ – нормально наследственная формация, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой формацией.

Лемма 2. Пусть A – простая группа, $N_1, N_2, \ldots, N_t$ – нормальные подгруппы группы G, такие что $\bigcap_{i=1}^t N_i = 1$. Тогда если $A \notin C(Soc(G/N_i))$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, то $A \notin C(Soc(G))$.

Напомним, что символом $\mathfrak{G}_{cp}$ обозначается (см.[4]) класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны, а символом $E(Z_p)'$ (см.[1]) – класс всех таких групп, у которых нет композиционных факторов, изоморфных группе Z_p.

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ – такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая формация, $\mathfrak{F} = c_\omega^\tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$, f – минимальный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}(C^p))$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$;

3) $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(C(\mathfrak{F}))$;

4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ и спутник h τ-значен, то для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$ имеет место

$$f(p) = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

и

$$f(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

Доказательство. Пусть t – такой τ-значный ω-композиционный спутник, что

$$t(a) = \begin{cases} \tau\mathrm{form}\,(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega', \\ \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}(C^p)), & \text{если } a = p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(C(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

Покажем, что $t = f$. Очевидно, что $\mathfrak{X} \subseteq CF_\omega(t)$. Покажем, что формация $CF_\omega(t)$ является τ-замкнутой. Так как согласно [2]

$$CF_\omega(t) = (\bigcap_{p \in \omega_1} E(Z_p)') \cap (\bigcap_{p \in \omega_2} \mathfrak{G}_{cp} t(p)) \cap \mathfrak{G}_\omega t(\omega')),$$

где

$$\omega_1 = \{p \in \omega \mid t(p) \neq \varnothing\}, \omega_2 = \omega \setminus \omega_1,$$

то достаточно показать, что каждая из пересекаемых формаций является τ-замкнутой.

Очевидно, что формацмя $E(Z_p)'$, где $p \in \omega_1$, является sn-замкнутой, а поскольку согласно нашему допущению $\tau \leq sn$, то формацмя $E(Z_p)'$, является также τ-замкнутой.

Так как формация $\mathfrak{G}_{cp}$ является, очевидно, s_{sn}-замкнутой, а $t(p)$ является τ-замкнутой, то по лемме 1 формация $\mathfrak{G}_{cp}t(p)$, где $p \in \omega_1$, также τ-замкнута. Формация

$\mathfrak{S}_\omega t(\omega')$ является также τ-замкнутой по лемме 1 как произведение s_{sn}-замкнутой формации $\mathfrak{S}_\omega$ и τ-замкнутой формации $t(\omega')$.

Таким образом, $CF_\omega(t)$ является τ-замкнутой ω-композиционной формацией, а значит,

$$\mathfrak{F} = c_\omega^\tau \mathrm{form}\,(\mathfrak{X}) \subseteq CF_\omega(t).$$

Пусть f_1 – произвольный τ-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Так как для любой группы G из $\mathfrak{F} = CF_\omega(f_1)$ выполняется включение $G/R_\omega(G) \in f_1(\omega')$, то

$$t(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega').$$

Так как $G/C^p(G) \in f_1(p)$ для любого $p \in \pi(C(G)) \cap \omega$, то

$$t(p) = \tau\mathrm{form}\,(\mathfrak{X}(C^p)) \subseteq f_1(p).$$

Таким образом, $t \leq f_1$, а значит,

$$CF_\omega(t) \subseteq CF_\omega(f_1) = \mathfrak{F}.$$

Следовательно,

$$CF_\omega(t) = \mathfrak{F}.$$

Покажем, что $t = f$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех τ-замкнутых ω-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$ и $h = \bigcap_{i \in I} f_i$. Тогда, согласно доказанному выше, $t \leq h$. Но по лемме 2[2] h является τ-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$, а значит, $t \in \{f_i \mid i \in I\}$. Следовательно, $h \leq t$, а значит $t = h$. Таким образом, t является минимальным τ-значным ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$ и $t = f$.

Докажем 4). Очевидно, что для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место включение $G/C^p(G) \in h(p) \cap \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Кроме того, по лемме 2, $O_p(G/C^p(G)) = 1$. Следовательно,

$$f(p) \subseteq \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

для любого $p \in \pi(C(\mathfrak{F})) \cap \omega$.

Пусть теперь $G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1$ и пусть $T = Z_p \wr G = [K]G$, где K – база сплетения T. Тогда по лемме 2[3], $C^p(T) = K$, а значит, ввиду леммы 4[2], $T \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \simeq T/C^p(T) \in f(p)$. Таким образом,

$$f(p) = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1).$$

Так как для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ выполняется включение

$$G/R_\omega(G) \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},$$

и, кроме того, $R_\omega(G/R_\omega(G)) = 1$, то

$$f(\omega') \subseteq \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

Пусть теперь $G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1$. Тогда $G \simeq G/R_\omega(G) \in f(\omega')$, а значит,

$$f(\omega') = \tau\mathrm{form}\,(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда τ – тривиальный подгрупповой функтор (т.е. для любой группы G имеет место $\tau(G) = \{G\}$) из теоремы непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие [3]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая совокупность групп, $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, f – минимальный композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $f(p) = \mathrm{form}\,(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F}))$;

2) $f(p) = \varnothing$ для всех $p \notin \pi(C(\mathfrak{F}))$;

3) если $\mathfrak{F} = CF(h)$, то для всех $p \in \pi(C(\mathfrak{F}))$

$$f(p) = \mathrm{form}\,(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1).$$

Abstract. In the paper a description of the minimal τ-valued ω-composition satellite for formations of finite groups is given.

Литература

1. Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

2. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал. — 2000. — Т. 52, №6, — С. 783–797.

3. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. — 1992. — вып.7. — С. 39–43.

4. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Смоленск: Изд-во СГПИ им. К.Маркса, 1998. — 96 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.01.06