Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №2(47), 2008

УДК 512.542

Об одной проблеме теории формаций конечных групп

О. А. Мокеева

В Коуровской тетради [1] Л. А. Шеметковым была поставлена проблема классификации сверхрадикальных формаций. Данный тип формаций определяется на основании понятия $\mathfrak{F}$-субнормальности, которое является естественным обобщением понятия субнормальности.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу K группы G называют $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь*

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. *Формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если она удовлетворяет следующим требованиям:*

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Полное решение проблемы Л. А. Шеметкова в классе конечных разрешимых групп было получено в 1996 году В. Н. Семенчуком. В 2000 году Л. А. Шеметковым и В. Н. Семенчуком были найдены серии произвольных локальных сверхрадикальных формаций. А. Ф. Васильев предложил изучать формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведения подгрупп A и B, у которых любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в AB. Именно развитию данного направления и посвящена настоящая работа.

В работе рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [2].

Минимальной не $\mathfrak{F}$-группой мы будем называть группу, не принадлежащую некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Множество таких групп обозначают $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{S}_\pi$ — множество всех π-групп, $\mathfrak{S}$ — множество всех разрешимых групп.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 ([3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ и $\Phi(G) = 1$, то $G = N \rtimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G, N — p-группа, $M \in \mathcal{M}(f(p))$, f — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{H}$ — наследственная локальная формация. Если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ и $G/K \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, где $K \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;

2) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, K — подгруппа группы G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K;

3) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K, а K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

4) если H_1 и H_2 $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы G, то $H_1 \cap H_2$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то каждая субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной;

6) если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любых $x \in G$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H — подгруппа группы G, N — нормальная подгруппа из G. Тогда:*

1) если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;

2) если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.

Пусть N — множество натуральных чисел, I — подмножество $N \times N$, $(i, j) \in I$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация такая, что $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) любая группа $G = AB$, где A_p и B_p — $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$ $(p \in \pi(\mathfrak{F}))$;

2) $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, где π_i, π_j — некоторые множества простых чисел.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2).

Заметим, что формация $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной. Действительно, пусть $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G, $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть A_p и B_p произвольные p-силовские подгруппы из A и B соответственно. Так как $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то A_p и B_p $\mathfrak{F}$-субнормальны соответственно в A и B. Так как A и B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то по лемме 3 A_p и B_p $\mathfrak{F}$ -субнормальны в группе G. Согласно условию, $G \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Пусть G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Согласно условию теоремы G разрешима. Если $G \notin \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то нетрудно заметить, что G — группа простого порядка q, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$. Согласно лемме 1, $G = N \leftthreetimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G, N — p-группа, $M \in \mathcal{M}(f(p))$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $C_G(N) = N$.

Покажем, что M является примарной циклической подгруппой. Предположим противное. Так как M — разрешимая группа, то в M существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $M = M_1M_2$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то, очевидно, что NM_1 и NM_2 — $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Но тогда $G = NM_1 \cdot NM_2$. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, M имеет единственный класс максимальных сопряженных подгрупп. А это значит, что M — циклическая q-подгруппа. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация и $G \notin \mathfrak{F}$, то $q \neq p$.

Теперь покажем, что $|M| = q$. Предположим противное. Пусть $|M| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L — циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $EwrL$. И пусть K — база сплетения, т.е. $T = K \leftthreetimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна M, то $T \notin f(p)$. Очевидно, что подгруппы K, L принадлежат формации $f(p)$.

Пусть $K = PwrT$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R = C \leftthreetimes T = C \leftthreetimes (K \leftthreetimes L)$.

Так как $R/C \simeq K \rtimes L \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. А это значит, что подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$-субнормальны в R.

Легко видеть, что $CK \in \mathfrak{F}$, $CL \in \mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $R \in \mathfrak{F}$. Но $F_p(R) = C$, и поэтому $T \simeq R/C \in f(p)$.

Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Следовательно, G — группа Шмидта. Итак, мы показали, что $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта. Теперь, из леммы 2 следует, что G — группа Шмидта.

Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$, для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Действительно, пусть $\mathfrak{F}^*$ такая формация, у которой есть локальный экран h. Покажем, что $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Так как $f(p) \subseteq h(p)$ для любого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Покажем обратное включение.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \backslash \mathfrak{F}$. Так как $h(p)$ — наследственная формация, то и формация $\mathfrak{F}^*$ также является наследственной. А это значит, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$.

Выше мы показали, что G — либо группа простого порядка, либо группа Шмидта. Пусть G — группа простого порядка и $|G| = q$. Нетрудно показать, что $\pi(\mathfrak{F}^*) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть теперь G — группа Шмидта. Так как $\Phi(G) = 1$, то из свойств группы Шмидта следует, что $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = F_p(G)$ и $|G_q| = q$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то $G/G_p \in h(p)$. Из того факта, что $G/G_p \simeq G_q$ следует, что $G_q \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$. Так как $q \in \pi(f(p))$ и $f(p)$ — наследственная формация, то $G_q \in f(p)$. Теперь из того факта, что $G/G_p \in \mathfrak{F}$, где G_p — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $G/G_p \in f(p)$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$. А это значит, что $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Так как h — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$. А это значит, что $\mathfrak{F}$ — формация из пункта 2.

Докажем, что из 2) следует 1).

Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ и G — такая группа, что $G = AB$, у которой силовские подгруппы A_p и B_p из подгрупп A и B $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство данного утверждения проведем индукцией по порядку группы G.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Ясно, что любая силовская подгруппа из AN/N и BN/N имеет вид A_pN/N, B_pN/N, где A_p и B_p — силовские подгруппы из A и B соответственно. Согласно лемме 4, A_pN/N и B_pN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы фактор-группы G/N. По индукции, $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то отсюда следует, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Очевидно, что $N = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$.

Пусть A_p — силовская подгруппа из A. Покажем, что $A_pN \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — абелева группа. Так как A_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то согласно теореме 15.10 из [2] $A_pN \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — неабелева группа. В этом случае $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$ есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = A_pN$. Согласно лемме 4, $H = A_pN$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $H = A_pN = G$. Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$ и A_p

— собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то равенство $A_pN = G$ невозможно. Итак, $H \neq G$.

Так как $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $A_p \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что

$$H/N = A_pN/N \cong A_p/A \cap N \in \mathfrak{F}.$$

А это значит, что $(H)^{\mathfrak{F}} = (A_pN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Если $(A_pN)^{\mathfrak{F}} = N$, то $A_pN = (A_pN)^{\mathfrak{F}} A_p$. Последнее равенство невозможно, так как A_p согласно лемме 3 — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа A_pN.

Итак, $(A_pN)^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа N. Если $(A_pN)^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то

$$(AN)^{\mathfrak{F}} = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \ldots \times N_{i_n}.$$

Так как $AN/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $N/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но тогда нетрудно заметить, что $N \in \mathfrak{F}$.

Так как $N = G^{\mathfrak{F}}$, то согласно лемме 3, N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа. Так как $N \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то любая силовская подгруппа N_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в N. Согласно лемме 3, N_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. По индукции $H = A_pN \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $A_pN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой $(i,j) \in I$.

Аналогичным образом доказывается, что $B_pN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой $(i,j) \in I$, где B_p — любая силовская подгруппа из B. Из того, что $A_pN \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, следует $A_pN/O_{\pi_i}(A_pN) \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$.

Рассмотрим два случая: $N \cap O_{\pi_i}(A_pN) \neq 1$ и $N \cap O_{\pi_i}(A_pN) = 1$.

Пусть $N \cap O_{\pi_i}(A_pN) \neq 1$. Покажем, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

Если N — абелева, то N — примарная группа. Отсюда следует, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

Если N — неабелева, то $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$ есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп.

Так как $N \cap O_{\pi_i}(A_pN)$ — нормальная подгруппа из N, то

$$N \cap O_{\pi_i}(A_pN) = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \ldots \times N_{i_n}.$$

Так как $N \cap O_{\pi_i}(A_pN) \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$, то очевидно, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}$. Так как $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой $(i,j) \in I$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $N \cap O_{\pi_i}(A_pN) = 1$. Если N — неабелева, то $C_G(N) = 1$. Тогда $O_{\pi_i}(A_pN) \subseteq C_G(N) = 1$. Отсюда следует, что $O_{\pi_i}(A_pN) = 1$. А это значит, что $A_pN \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Отсюда следует, что $p \in \pi_j$, где p — любое простое число из $\pi(A)$.

Рассмотрим подгруппу $N \cap O_{\pi_i}(B_pN)$, где B_p — любая силовская подгруппа из B.

Если $N \cap O_{\pi_i}(B_pN) \neq 1$, то, как и выше, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

Если $N \cap O_{\pi_i}(B_pN) = 1$, то, как и выше, получаем, что $B_pN \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$. Отсюда следует, что $p \in \pi_j$, где p — любое простое число из $\pi(B)$. Согласно лемме 11.6 из [2] любая силовская подгруппа G_p группы G есть $G_p = A_pB_p$, где A_p, B_p — силовские подгруппы из A и B соответственно. Отсюда следует, что любое простое число p из $\pi(G)$ принадлежит $\mathfrak{G}_{\pi_j}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_{\pi_j}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — абелева группа, то $C_G(N) = N$. Но тогда $O_{\pi_i}(A_pN) \subseteq C_G(N) = N$.

Ввиду $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, получаем, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ для любой $(i,j) \in I$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Abstract. All groups considered are finite. The following theorem is presented in the paper.

Theorem. Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary local formation such that $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$. Then the following assertions are equivalent:

1) any group $G = AB$ where A_p and B_p are $\mathfrak{F}$-subnormal in G be-longs to $\mathfrak{F}$ $(p \in \pi(\mathfrak{F}))$;

2) $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ where π_i π_j are the sets of prime numbers.

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Институт математики СО АН СССР. — Новосибирск, 1992. — 146 с.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков // М.: Наука. 1978.

3. Семенчук, В.Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В. Н. Семенчук // Алгебра и логика. — 1979. — Т. 18, № 3. — С. 348–382.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.02.08