Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №2(53), 2009

Математика

УДК 517.925

Аналитические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка

Т. К. Андреева

Введение. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}(y'-y^2)y^2y''' &= y^2y''^2 + A_1yy'^2y'' + A_2y'^4 + A_3y^3y'y'' + \\ &+ A_4y^2y'^3 + A_5y^5y'' + A_6y^4y'^2 + A_7y^6y' + A_8y^8.\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$y' = y^2u, \quad (u-1)u'' = u'^2 - p(u)u'y - q(u)y^2, \tag{2}$$

где $p(u) = (2-A_1)u^2 - (A_3+6)u - A_5$,

$q(u) = (2-2A_1-A_2)u^4 - (2A_3+A_4+6)u^3 - (2A_5+A_6)u^2 - A_7u - A_8$.

Уравнение (1) при $p(1)=q(1)=0$ и $2-2A_1-A_2 \neq 0$ исследовано в [1; 2]. При $A_1 = A_2 = 0$, $q(1)=0$ исследование исходного уравнения проведено в [3]. В [4] для уравнения (1) получены некоторые необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек и условия существования двухпараметрических семейств решений, подвижные особые точки которых однозначны.

В данной работе проведен Пенлеве-анализ уравнения (1) при $q(1)=0$ и

$$2-2A_1-A_2 = 0. \tag{3}$$

Основной результат

Упрощенное для (1) уравнение, инвариантное при замене переменных $(y, z; y, \varepsilon z)$, имеет вид

$$\dddot{y} = \frac{\ddot{y}^2}{\dot{y}} + A_1\frac{\dot{y}\ddot{y}}{y} + A_2\frac{\dot{y}^3}{y^2}. \tag{4}$$

Согласно [1; 5], для отсутствия подвижных критических точек у уравнения (4), при выполнении условия (3), необходимо требовать, чтобы $A_1 = 2-\mu, A_2 = 2(\mu-1),\ \mu = 0,1$.

Для дальнейшего исследования понадобится условие

$$q'(1) + p(1)(1+p'(1)) = 0, \tag{5}$$

необходимое для однозначности решений уравнения (1) [1; 6].

Рассмотрим сначала случаи, когда условие $q(u) \equiv 0$ нарушено, т.е.

$$|2A_3+A_4+6| + |2A_5+A_6| + |A_7| + |A_8| \neq 0. \tag{6}$$

1. Пусть $2A_3+A_4+6 \neq 0$. В уравнение (1) введем замену $y = \dfrac{1}{x}$. Тогда из (1) для x получим уравнение

$$\begin{aligned}x^2(x'+1)x''' &= x^2x''^2 + (2-A_1)xx'^2x'' + (2A_1+A_2-2)x'^4 + (A_3+6)xx'x'' - \\ &- (2A_3+A_4+6)x'^3 - A_5xx'' + (2A_5+A_6)x'^2 - A_7x' + A_8.\end{aligned} \tag{7}$$

В уравнение (7) введем параметр ε, считая $z = \varepsilon t$. Тогда (7) примет вид:

$$x^2(x' + \varepsilon)x''' = \varepsilon^2 x^2 x'' + (2 - A_1)xx'^2 x'' + (2A_1 + A_2 - 2)x'^4 + \varepsilon(A_3 + 6)xx'x'' - \\ - \varepsilon(2A_3 + A_4 + 6)x'^3 - \varepsilon^2 A_5 xx'' + \varepsilon^2(2A_5 + A_6)x'^2 - \varepsilon^3 A_7 x' + \varepsilon^4 A_8. \quad (8)$$

Находя решение уравнения (8) в виде ряда $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\varepsilon^k$, получим, что при $A_1 = 1, A_2 = 0, A_4 \neq 0$ и $A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 \neq -6, A_4 \neq 6$ функция $x_1(t)$ имеет подвижные критические особые точки. Поэтому для однозначности функции $x(t)$, необходимо требовать $A_1 = 1, A_2 = 0, A_4 = 0$ или $A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -6, A_4 = 6$.

Рассмотрим случай $A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ A_4 = 0$. Используя соотношение (5) и $q(1) = 0$, получим $A_7 = A_3^2 + (A_5 + 2)A_3 - 2A_6 - A_5 - 3,\ A_8 = -A_3^2 - (A_5 + 4)A_3 + A_6 - A_5 - 3$. Уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{y'' + \beta yy' + \gamma y^3}{y' - y^2}\right)' = (A_3 + 3)y\left(\frac{y'' + \beta yy' + \gamma y^3}{y' - y^2}\right) + \frac{y'}{y}\left(\frac{y'' + \beta yy' + \gamma y^3}{y' - y^2}\right), \quad (9)$$

где $\beta = \dfrac{A_6 + 2A_5 + 2A_3 + 6}{A_3 + 3}, \gamma = \dfrac{A_3^2 + A_3(A_5 + 4) + A_5 - A_6 + 3}{A_3 + 3}$.

Обозначим

$$\frac{y'' + \beta yy' + \gamma y^3}{y(y' - y^2)} = u. \quad (10)$$

Из (9) получим

$$y = \frac{1}{A_3 + 3}\frac{u'}{u}. \quad (11)$$

Используя (10) и (11), построим уравнение для u:

$$u''' = \left[\frac{1}{A_3 + 3} + \frac{3(A_3 + 3) - \beta}{(A_3 + 3)u}\right]u'u'' - \left[\frac{A_3 + 4}{(A_3 + 3)^2 u} + \left(\frac{\gamma}{(A_3 + 3)^2} - \frac{\beta}{A_3 + 3} + 2\right)\frac{1}{u^2}\right]u'^3. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) имеет подвижные критические особые точки [5]. Тогда в силу (10) функция $y(z)$ имеет подвижные критические особые точки. Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Для отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (1) при условии (3) необходимо требовать* $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -3, A_4 = 0$ *или* $A_1 = 2, A_2 = -2,\ A_3 = -6,$ $A_4 = 6$.

Пример. Пусть в уравнении (1) будет $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -3 + \dfrac{3}{\alpha}, A_4 = 0,$ $A_5 = \dfrac{1}{\alpha^2}, A_6 = \dfrac{7}{\alpha^2} - \dfrac{6}{\alpha}, A_7 = \dfrac{3}{\alpha^3} - \dfrac{9}{\alpha^2}, A_8 = -\dfrac{3}{\alpha^3}, \alpha \in \mathbf{R}_+$. Легко проверить, что уравнение с такими коэффициентами проходит тест Пенлеве (о тесте Пенлеве см. [7]), однако не имеет свойства Пенлеве, как это следует из леммы 1.

2. Пусть $2A_3 + A_4 + 6 = 0, 2A_5 + A_6 \neq 0, A_7 \neq 0, A_8 \neq 0$. Согласно лемме 1, рассмотрим случаи:

$$A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -6, A_4 = 6; \quad (13)$$

$$A_1 = 1, A_2 = 0, A_4 = 0, A_3 = -3. \quad (14)$$

При выполнении (13), используя соотношение (5) и $q(1) = 0$, имеем $A_7 = -2A_6 - 5A_5$, $A_8 = A_6 + 3A_5$. Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{y'' - 2yy' + A_5 y^3}{y' - y^2} - 2\frac{y'}{y}\right)' = (3A_5 + A_6)y^2. \quad (15)$$

Выполнив в уравнении (15) замену,

$$\frac{y'' - 2yy' + A_5 y^3}{y' - y^2} - 2\frac{y'}{y} = w, \tag{16}$$

получим

$$y = \left(\frac{w'}{3A_5 + A_6}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Учитывая (16) и (17), получим

$$w''' = \frac{3}{2}\frac{w''^2}{w'} + ww'' - \frac{2A_5}{3A_5 + A_6}w'^2 - \frac{2}{(3A_5 + A_6)^{\frac{1}{2}}}ww'^{\frac{3}{2}}. \tag{18}$$

В уравнение (18) введем параметр ε, считая $z = \varepsilon t$. Находя решение полученного уравнения в виде ряда $w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t)\varepsilon^k$, получим, что при $A_6 \neq -2A_5$ функция $w_1(t)$ имеет подвижные критические особые точки. Так как выполняется (16), то $y(z)$ при $A_6 \neq -2A_5$ имеет подвижные критические особые точки. Поэтому для однозначности функции $y(z)$ при $A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -6, A_4 = 6$ необходимо требовать $A_6 = -2A_5$.

При выполнении (14), используя соотношение (5) и $q(1) = 0$, имеем $A_7 = -2(2A_5 + A_6)$, $A_8 = 2A_5 + A_6$. Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{y'' + A_5 yy'}{y' - y^2}\right)' = \frac{y'}{y}\left(\frac{y'' + A_5 yy'}{y' - y^2}\right) + (2A_5 + A_6)y^2. \tag{19}$$

Выполнив в уравнении (19) замену

$$\frac{y'' + A_5 yy'}{y' - y^2} = uy, \tag{20}$$

получим

$$y = \frac{u'}{2A_5 + A_6}. \tag{21}$$

Используя (20) и (21), будем иметь уравнение

$$u''' = \frac{1}{2A_5 + A_6}u'u''(u - A_5) - \frac{1}{(2A_5 + A_6)^2}uu'^3. \tag{22}$$

Решение уравнения (22) имеет подвижные критические особые точки [5]. Тогда в силу (20) функция $y(z)$ обладает этим же свойством. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 для отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (1) необходимо требовать* $A_6 = -2A_5$.

3. Пусть $2A_3 + A_4 + 6 = 2A_5 + A_6 = 0, A_7 \neq 0, A_8 \neq 0$. Согласно лемме 2, рассмотрим случаи:

$$A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -6, A_4 = 6, A_6 = -2A_5; \tag{23}$$

$$A_1 = 1, A_2 = 0, A_4 = 0, A_3 = -3, A_6 = -2A_5. \tag{24}$$

При выполнении (23), используя соотношение (5) и $q(1) = 0$, имеем $A_7 = -A_5, A_8 = A_5$. Легко убедиться, что если $A_5 \neq 0$, то решение уравнения (1), не имеет полярных особенностей. Также можно проверить, что уравнение (1) в данном случае не имеет полиномиальных решений. Для наличия целых трансцендентных решений необходимо $A_8 = 0$ [8, с. 180], значит $A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -6, A_4 = 6, A_5 = A_6 = 0, A_7 = 0, A_8 = 0.$

При выполнении (24), используя соотношение (5) и $q(1)=0$, получим $A_7=0, A_8=0$. Таким образом, справедлива

Лемма 3. *Для отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (1) при условии (3) необходимо требовать* $A_1=1, A_2=0, A_3=-3, A_4=0, A_6=-2A_5, A_7=A_8=0$ *или* $A_1=2, A_2=-2,\ A_3=-6,\ A_4=6,\ A_5=A_6=A_7=A_8=0$.

Заметим, что при выполнении леммы 3 условие (6) нарушено. Таким образом, верна

Теорема 1. *Общее решение уравнение (1) при* $q(1)=0$ *и условиях (3) и (6) имеет подвижные критические особые точки.*

Рассмотрим уравнение (1), для которого условие (3) выполнено и $q(u)\equiv 0$. Согласно лемме 3 рассмотрим случаи:

$$A_1=2, A_2=-2, A_3=-6, A_4=6, A_5=A_6=A_7=A_8=0; \tag{25}$$

$$A_1=1, A_2=0,\ A_3=-3, A_4=0, A_6=-2A_5, A_7=A_8=0. \tag{26}$$

При выполнении (25) уравнение (1) запишем в виде:

$$\left(\frac{y''-2yy'}{y'-y^2}-2\frac{y'}{y}\right)'=0. \tag{27}$$

Первый интеграл уравнения (27) имеет вид

$$y''=2\frac{y'^2}{y}+C_1(y'-y^2), \tag{28}$$

где $\tilde{N}_1$ – произвольная постоянная. В (28) введем замену $y=\dfrac{1}{v}$, тогда получим

$$v''=C_1(v'+1). \tag{29}$$

Линейное уравнение (29) не имеет подвижных особых точек [9, с. 46], а значит и критических. Следовательно, уравнение

$$(y'-y^2)y^2y'''=y^2y''^2+2yy'^2y''-2y'^4-6y^3y'y''+6y^2y'^3 \tag{30}$$

не имеет подвижных критических особых точек.

При выполнении (26) уравнение (1) можно записать в виде:

$$\left(\frac{y''+A_5yy'}{y'-y^2}\right)'=\frac{y'}{y}\left(\frac{y''+A_5yy'}{y'-y^2}\right). \tag{31}$$

Проинтегрировав уравнение (31), получим

$$y''=(C_1-A_5)yy'-C_1y^3, \tag{32}$$

где $\tilde{N}_1$ – произвольная постоянная. Уравнение (32) имеет подвижные критические особые точки [10, с. 445]. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Уравнение (1) при* $q(1)=0$ *и* $2-2A_1-A_2=0$ *не имеет подвижных критических особых точек только при выполнении условий (25).*

Заключение. В работах [1–3] проведено исследование уравнения (1) на предмет отсутствия подвижных критических особых точек при условии $2-2A_1-A_2\neq 0$. В данной работе это ограничение снято и показано, что при $q(1)=0$ и выполнении условий (3) и (7) уравнение (1) имеет подвижные критические особые точки, а при выполнении условий (3) и (25) уравнение (1) обладает свойством Пенлеве.

Abstract. The necessary and sufficient conditions of the Painleve property for one class of the third order ordinary differential equations are considered in the paper.

Литература

1. Мартынов, И.П. Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С.937 –946.

2. Мартынов, И.П. Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка / И.П. Мартынов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 5. – С.764 – 771.

3. Мартынов, И.П. Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве / И.П. Мартынов, В.А. Пронько //Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, №9. – С.1640 – 1641.

4. Белясова, В.Г. Аналитическая характеристика решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка специального вида: дис… канд. физ.-мат. наук / В.Г. Белясова. – Минск, 1994. – 77 с.

5. Carton – Lebrun, C. Simplifiées de Painlevé dont les solutions sont à points critiques isolés fixes // Bull. de Sci roy. Belg. 1969. Vol 55 №10 P. 883 – 915.

6. Березкина, Н.С. Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных критических особенностей / Н.С. Берёзкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тез. докл. междунар. конф., Минск, 7 – 10 декабря 2005 г. Мин-во образования РБ. Бел. гос. ун-т. Ин-т мат. НАН Беларуси. – Минск, 2005. – С. 4 – 5.

7. Ablowitz, M.J. A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-Type / M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. I. and II. – 1980. – V. 21, № 4 – P.715 – 721.; V. 21, № 5 – P. 1006 – 1015.

8. Горбузов, В.Н. Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений / В.Н. Горбузов. – Гродно: ГрГу, 2006. – 255 с.

9. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 436 с.

10. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИ, 1939. – 719 с.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступило 13.02.09